Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

MaxFlow-MinCut: Zusammenfassung

Hier haben wir die wichtigen Ergebnisse zum Maximum Flow/Minimum Cut nochmals kurz zusammengestellt.

1 Maximum Flow als ILP

Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk mit Kantenkapazitäten $c : E \to \mathbb{N}_0$. Dann lässt sich das Problem, einen maximalen s-t-Fluss in N zu finden, wie folgt als ILP schreiben:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{u \in V:(s,u)\in E} x_{su} - \sum_{u \in V:(u,s)\in E} x_{us} \\
& \sum_{u \in V:(u,v)\in E} x_{uv} - \sum_{u \in V:(v,u)\in E} x_{vu} = 0 \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{s,t\} \\
& \sum_{u \in V:(s,u)\in E} x_{su} - \sum_{u \in V:(u,t)\in E} x_{ut} = 0 \\
& x_{uv} \le c\big((u,v)\big) \quad \text{für alle } (u,v) \in E \\
& x \in \mathbb{N}_0^{|E|}
\end{aligned}
$$

Alternativ, mit Hilfe der (Knoten-Kanten-) Inzidenzmatrix A des Digraphen G (nicht ganz die Formulierung, die wir in der Stunde gewählt hatten – diese hier hat den Vorteil, dass sich das Duale etwas einfacher interpretieren lässt, auch wenn es zunächst komplizierter aussieht):

$$
\begin{aligned}
\max\ & \phi \\
& Ax - \phi(u_t - u_s) = 0 \\
& x_{uv} \le c\big((u,v)\big) \quad \text{für alle } (u,v) \in E \\
& x \in \mathbb{N}_0^{|E|} \\
& \phi \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}
$$

Man kann sich das auch so vorstellen, dass der Digraph um eine zusätzliche Kante (t, s) ergänzt wird – das sieht man in der neuen Inzidenzmatrix $(A|u_s - u_t)$, die um eine Spalte ergänzt wird. In diesem neuen Digraphen suchen wir dann eine Zirkulation (das ist ein Fluss, der in allen Knoten die Flusserhaltungsbedingung erfüllt), deren Wert (ϕ)auf der Kante (t, s) möglichst groß ist.

Satz 1
Das durch obige $\mathcal{H}$-Darstellung definierte Polyeder ist beschränkt und ganzzahlig, d. h. es handelt sich um ein Polytop, dessen sämtliche Ecken ganzzahlig sind.

Beweis. Die Beschränktheit folgt aus den Ungleichungen $x_{uv} \le c\big((u,v)\big)$. Da A Inzidenzmatrix eines Digraphen ist, ist die Matrix bekanntlich total unimodular, das gilt dann natürlich genauso für die Matrix $\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I_{|E|} \end{pmatrix}$. Also ist das Polytop für alle rechten Seiten ganzzahlig. $\square$

2 Dualität, minimale Schnitte und das MaxFlow-MinCut-Theorem

Mit der (Knoten-Kanten-) Inzidenzmatrix A lässt sich eine LP-Relaxation des MaxFlow-ILP wie folgt formulieren (mit dualen Variablenbezeichnungen am Rand):

$$\begin{aligned}
\max\ & \phi \\
& Ax - \phi(u_t - u_s) = 0 && && (y) \\
& x_{uv} \leq c\big((u,v)\big) && \text{für alle } (u,v) \in E && (z_{uv}) \\
& x \geq 0 \\
& \phi \geq 0
\end{aligned}$$

Dualisiert man diese Relaxation, so erhält man

$$\begin{aligned}
\min\ & \sum_{(u,v)\in E} c\big((u,v)\big) \cdot z_{uv} \\
& A^T y + z \geq 0 \\
& y_s - y_t \geq 1 \\
& y \in \mathbb{R}^{|V|} \\
& z \geq 0
\end{aligned}$$

Ausführlicher geschrieben:

$$\begin{aligned}
\min\ & \sum_{(u,v)\in E} c\big((u,v)\big) \cdot z_{uv} \\
& z_{uv} \geq y_u - y_v \quad \text{für alle } (u,v) \in E \\
& y_s \geq 1 + y_t \\
& y \in \mathbb{R}^{|V|} \\
& z \geq 0
\end{aligned}$$

- Offenbar lässt sich eine der y_v-Variablen beliebig normieren, z hängt ja ohnehin nur von der Differenz der Variablen ab.
- Wir können also z. B. $y_t = 0$ annehmen, dann ist $y_s \geq 1$. (Hier fällt die Interpretation ein bisschen leichter, als wir das in der Stunde besprochen hatten)
- Da eine (positiv) gewichtete Summe über die z_{uv}-Variablen minimiert werden soll, nehmen diese Variablen jeweils die kleinstmöglichen Werte an – es liegt also nahe, zunächst nach einer Lösung zu suchen, die möglichst viele der $z_{uv} \geq y_u - y_v$-Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt.

- Das lässt sich für alle Kanten realisieren, für die Anfangs- und Endknoten gleichen y-Wert haben (man nennt so eine „Knotenvariable“ übrigens häufig ein *Knotenpotenzial*).
- Andererseits ist wegen $y_s \geq 1$ und $y_t = 0$ auch klar, dass nicht alle Knoten einheitliches Potenzial besitzen können – auf jedem s-t-Weg muss sich das Potenzial um mindestens 1 erniedrigen.
- Wenn wir nach einer ganzzahligen Lösung suchen, heißt das, dass es auf jedem s-t-Weg eine Kante geben muss, auf der sich das Potenzial um 1 erniedrigt.
- Wir suchen also eine Menge von Kanten, so dass jeder s-t-Weg wenigstens eine dieser Kanten enthält. Das ist gleichbedeutend damit, den Graphen in zwei Teile zu „zerschneiden“.
- Sei also $V_s \cup V_t = V$ eine Partition von V, so dass $s \in V_s$ und $t \in V_t$ und sei $C := \{(u,v) \in E : u \in V_s,\ v \in V_t\}$. Die Partition bzw. die Menge C (konfus, aber üblich) bezeichnet man naheliegend als *Schnitt* des Netzwerks bzgl. s und t.
- Mit dieser Interpretation ist klar: Das duale Problem besitzt zulässige Lösungen, für die $z \in [0,1]^{|E|}$ und $y \in [0,1]^{|V|}$ gilt. Da das primale LP eine Optimallösung besitzt, ist auch das duale LP lösbar (also insbesondere zulässig und beschränkt). Lässt man Werte jenseits von 1 für z und/oder y zu, so kann sich die Lösung jedenfalls nicht verbessern ($c \geq 0$), also genügt es, nach Lösungen innerhalb des Einheitswürfels zu suchen.
- Da die Nebenbedingungs-Matrix total unimodular ist (Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen plus Einheitsmatrix), und auch nach Hinzufügen von $z \leq 1$ und $0 \leq y \leq 1$ bleibt, gibt es eine ganzzahlige optimale Lösung des dualen Problems. Damit folgt: Die ganzzahligen Lösungen des dualen Problems korrespondieren genau zu den Schnitten des Graphen ($z_{uv} = 1$ kennzeichnet die Kanten in C, y-Werte kennzeichnen die Partition).
- Der Dualitätssatz kann (wg. TUM) auch auf die ganzzahligen Probleme angewandt werden, damit ergibt sich: Der Wert eines maximalen Flusses ist gleich dem Wert eines minimalen Schnitts.

Definition 2
Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk mit Digraph $G = (V, E)$ und Kapazitätsfunktion c. Eine Partition $V_s \cup V_t = V$ der Knotenmenge mit $s \in V_s$ und $t \in V_t$ heißt *s-t-Schnitt* im Netzwerk, die Menge $C = \{(u,v) \in E : u \in V_s,\ t \in V_t\}$ sind die *Kanten im Schnitt*. Die Kapazität des Schnitts ist $\sum_{e \in C} c(e)$.

Satz 3 (MaxFlow-MinCut-Theorem)
Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk. Dann ist der Wert eines maximalen s-t-Flusses in N gleich dem Wert eines minimalen s-t-Schnitts.