Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Station 2: Polynomielle Reduktion

Diskutieren Sie folgende Fragen in der Gruppe und tragen Sie Ihre Antworten auf dem Arbeitsblatt ein. Das ausgefüllte Blatt heften Sie anschließend in Ihre Gruppenmappe.

Problem 1: Hamilton-Pfad

Input: Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, ein Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten.

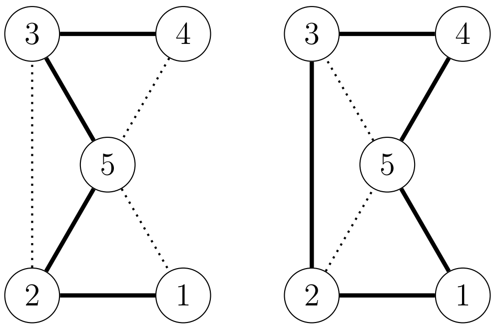
Frage: Gibt es in G einen Hamilton-Pfad? Ein Hamilton-Pfad ist ein Weg in G, der jeden Knoten in V genau einmal besucht.

Problem 2: Hamilton-Kreis

Input: Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, ein Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten.

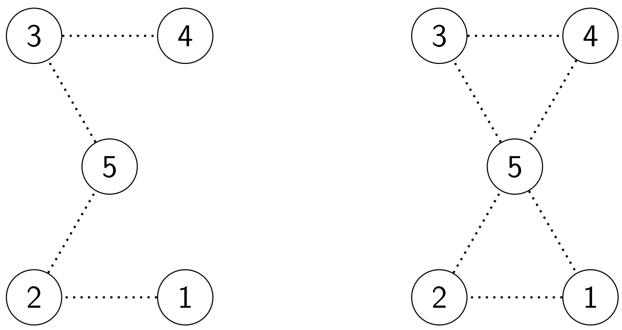
Frage: Gibt es in G einen Hamilton-Kreis? Ein Hamilton-Kreis ist ein Kreis in G, der jeden Knoten in V genau einmal durchläuft.

Die Abbildungen zeigen beispielhaft einen Graphen, der sowohl einen Hamilton-Pfad (links) als auch einen Hamilton-Kreis (rechts) besitzt.



1. Zeichnen Sie einen Beispielgraphen, der einen Hamilton-Pfad, aber keinen Hamilton-Kreis besitzt.

Einen solchen Graphen erhält man z. B., indem man aus dem obigen Graphen die Kanten entfernt, die in der linken Abbildung nicht Teil des Hamilton-Pfades sind. Es würde aber auch schon reichen, eine beliebige Kante des Hamilton-Kreises in der rechten Abbildung zu entfernen. Lässt man z. B. Kante $\{2, 3\}$ weg, so enthält der Graph keinen Hamilton-Kreis mehr, da ein solcher Kreis keinen Knoten mehr als einmal durchlaufen darf.



Bitte wenden!

2. Zeigen Sie, dass Hamilton-Pfad und Hamilton-Kreis polynomiell äquivalent sind. *Tipp: Ergänzen Sie den ursprünglichen Graphen G geeignet. Für die Reduktion von Hamilton-Kreis auf Hamilton-Pfad ergänzen Sie G um einige Knoten. Fügen Sie dann Kanten ein, die sicherstellen, dass jeder Hamilton-Pfad in dem erweiterten Graphen zwei neue Knoten als Endknoten haben muss.*

Zu zeigen: Hamilton-Pfad (HP) und Hamilton-Kreis (HK) sind polynomiell äquivalent, d. h., es gilt $(\mathrm{HP}) \prec_p (\mathrm{HK})$ und $(\mathrm{HK}) \prec_p (\mathrm{HP})$.

„$(\mathrm{HP}) \prec_p (\mathrm{HK})$“:

Bei dieser Richtung haben mehrere Gruppen Folgendes geschrieben: Wenn ein Graph einen Hamilton-Kreis enthält, dann logischerweise auch einen Hamilton-Pfad (indem man eine Kante des Kreises weglässt). Folglich reicht ein Algorithmus für (HK), um (HP) zu entscheiden. Das klappt zwar in dem Fall, dass der Graph einen Hamilton-Kreis enthält. Es kann jedoch passieren, dass ein Graph keinen Hamilton-Kreis, durchaus aber einen Hamilton-Pfad enthält, siehe Aufgabe 1. Dann würde ein solcher Algorithmus für (HK) „Nein“ sagen und wir wüssten trotzdem nicht, ob der Graph nicht doch einen Hamilton-Pfad enthält.

Sei ein polynomieller Algorithmus gegeben, der (HK) entscheidet. Für einen gegebenen Graphen $G = (V = \{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ wollen wir nun (HP) entscheiden. Konstruiere aus G einen neuen Graphen G', der einen zusätzlichen Knoten v_{n+1} und Kanten von v_{n+1} zu allen Knoten aus V enthält, d. h., $G' = (V', E')$ mit $V' = V \cup \{v_{n+1}\}$ und $E' = E \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{v_i, v_{n+1}\}$. Dann gilt:

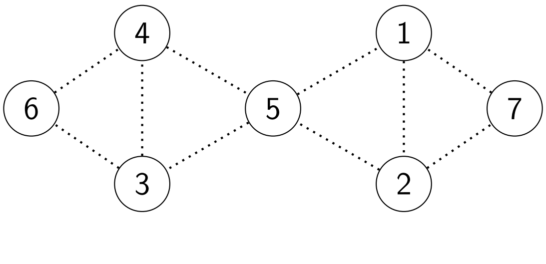
$$\exists \text{ Hamilton-Pfad in } G \Leftrightarrow \exists \text{ Hamilton-Kreis in } G'.$$

Denn wenn G einen Hamilton-Pfad mit Endknoten $v_i, v_j \in V$ enthält, so kann dieser in G' mit Hilfe der Kanten $\{v_i, v_{n+1}\}$ und $\{v_j, v_{n+1}\}$ zu einem Hamilton-Pfad ergänzt werden.

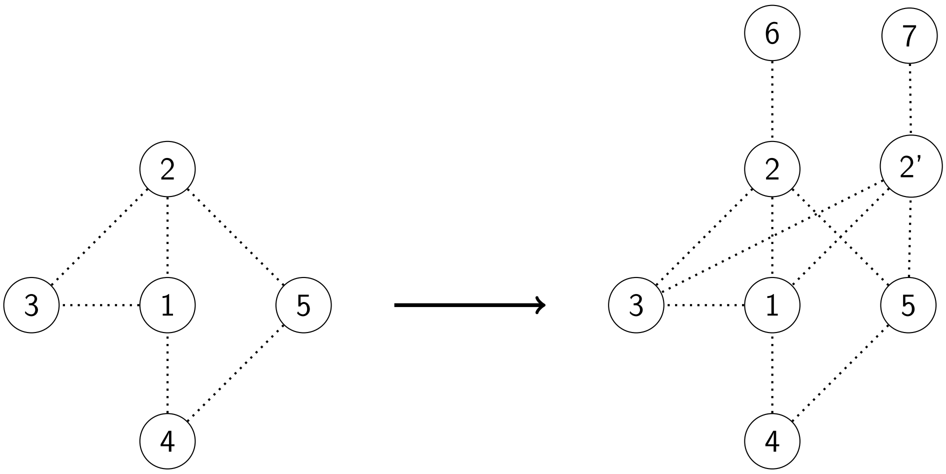
Wenn wiederum G' einen Hamilton-Kreis enthält, so muss dieser, da jeder Knoten aus V' genau einmal durchlaufen wird, zwei „neue“ Kanten $\{v_i, v_{n+1}\}$ und $\{v_j, v_{n+1}\}$ mit $v_i \neq v_j$ benutzen, die v_{n+1} in den Kreis einbinden. Alle anderen Kanten auf dem Kreis sind „alte“ Kanten aus E. Entfernt man $\{v_i, v_{n+1}\}$ und $\{v_j, v_{n+1}\}$ aus dem Kreis, dann erhält man also einen Hamilton-Pfad auf den Knoten in V, der nur Kanten aus E benutzt und somit ein Subgraph von G ist.

„$(\mathrm{HK}) \prec_p (\mathrm{HP})$“:

Bei dieser Richtung haben mehrere Gruppen folgendes Verfahren vorgeschlagen: Entferne jede Kante einmal aus dem gegebenen Graphen und prüfe, ob der Restgraph dann noch einen Ham.-Pfad enthält. Wenn die Antwort jedes Mal „Ja“ ist, dann muss der Graph einen Ham.-Kreis enthalten. Das ist zwar eine schöne Idee, klappt jedoch leider nicht immer, siehe Gegenbeispiel:



Sei ein polynomieller Algorithmus gegeben, der (HP) entscheidet. Für einen gegebenen Graphen $G = (V = \{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ wollen wir nun (HK) entscheiden. Wähle einen beliebigen Knoten v_i aus V und konstruiere einen Graphen G', der zusätzlich zu den Knoten aus V noch drei weitere Knoten v_i', v_{n+1} und v_{n+2} enthält. Dabei ist v_i' eine „Kopie" von v_i, d. h., v_i' erhält Kanten zu den gleichen Nachbarn wie v_i. Der neue Knoten v_{n+1} erhält lediglich eine Kante zu v_i und v_{n+2} nur eine Kante zu v_i', siehe Abbildung.



Dann gilt:

$$\exists \text{ Hamilton-Kreis in } G \Leftrightarrow \exists \text{ Hamilton-Pfad in } G'.$$

Denn wenn es in G einen Ham.-Kreis K gibt, dann enthält K zwei Kanten $\{v_i, v_{j_1}\}$ und $\{v_i, v_{j_2}\}$ mit $j_1 \neq j_2$, die v_i in den Kreis einbinden. Dann lässt sich in G' ein Ham.-Pfad konstruieren, indem man K bei v_i „aufspaltet", die Kante $\{v_i, v_{j_2}\}$ aus K entfernt und stattdessen mit Hilfe der Kante $\{v_i', v_{j_2}\}$ einen Pfad von v_i nach v_i' baut. Verlängert man diesen Pfad noch an beiden Enden durch die Kanten $\{v_i, v_{n+1}\}$ und $\{v_i', v_{n+2}\}$, so erhält man einen Ham.-Pfad in G'.

Wenn es wiederum einen Ham.-Pfad P in G' gibt, dann müssen die beiden neuen Knoten v_{n+1} und v_{n+2} die Endknoten von P sein. Denn v_{n+1} und v_{n+2} haben nur Grad 1 und können deswegen nicht im „Innern" des Pfades liegen. Vom Endknoten v_{n+2} aus führt P über v_i' zu einem Nachbarn v_j von v_i (da v_i' mit den gleichen Knoten benachbart ist wie v_i) und zwar zu einem anderen Nachbarn von v_i als dem Vorgänger von v_i selbst auf P (da jeder Knoten nur einmal von P durchlaufen wird und wir $n > 2$ annehmen, weil G sonst eh keinen Hamilton-Kreis enthalten kann). Aus P lässt sich nun wie folgt ein Hamilton-Kreis in G konstruieren: Entferne die Kanten $\{v_i, v_{n+1}\}$ und $\{v_i', v_{n+2}\}$ sowie $\{v_j, v_i'\}$ aus P und füge stattdessen Kante $\{v_j, v_i\}$ in P ein. Wir schneiden also die Endkanten ab und „kleben" den Pfad mit den Endknoten v_i und v_i' zu einem Kreis zusammen, der nur noch Kanten aus E benutzt.