Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Station 2: Polynomielle Reduktion

Diskutieren Sie folgende Fragen in der Gruppe und tragen Sie Ihre Antworten auf dem Arbeitsblatt ein. Das ausgefüllte Blatt heften Sie anschließend in Ihre Gruppenmappe.

Problem 1: Dominating Set

Input: Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, ein Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten, eine natürliche Zahl $K \leq n$.

Frage: Gibt es in G ein *Dominating Set* der Kardinalität höchstens K? Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heißt *Dominating Set* für G, falls es für jeden Knoten $v \in V \setminus D$ ein $u \in D$ gibt mit $\{u, v\} \in E$ (jeder Knoten ist vom Dominating Set aus „sichtbar").

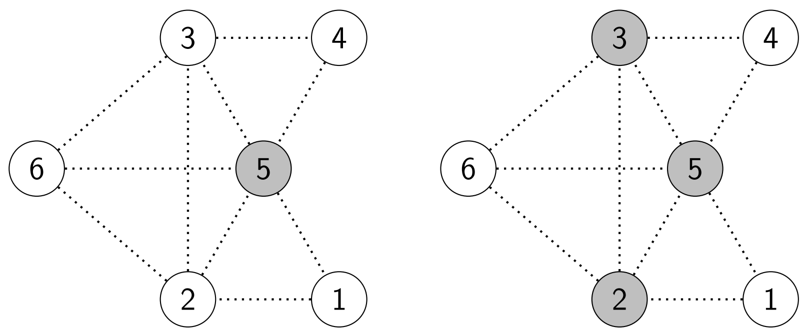
Problem 2: Vertex Cover

Input: Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, ein Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten, eine natürliche Zahl $K \leq n$.

Frage: Gibt es in G ein *Vertex Cover* der Kardinalität höchstens K? Eine Teilmenge $C \subseteq V$ heißt *Vertex Cover* (Knotenüberdeckung) für G, falls $e \cap C \neq \emptyset$ für alle $e \in E$.

1. Markieren Sie in den Abbildungen jeweils ein möglichst kleines Dominating Set bzw. ein möglichst kleines Vertex Cover.

Die grauen Knoten sind die Elemente eines minimalen Dominanting Sets (links) und eines minimalen Vertex Cover (rechts).



2. Zeigen Sie, dass sowohl Vertex Cover als auch Dominating Set in $\mathcal{NP}$ liegen.

Zu zeigen: Vertex Cover $\in \mathcal{NP}$.

Für eine Instanz I von (VC) gilt: $\text{size}(I) = \mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$. Ein mögliches Zertifikat für (VC) ist eine Menge $C \subseteq V$ (die kann in $\mathcal{O}(|V|)$ codiert werden). Um zu überprüfen, ob C ein

Vertex Cover ist, prüfe für jede Kante $\{u, v\} \in E$, ob $u \in C$ oder $v \in C$. Dies kann in $\mathcal{O}(|E|)$ Schritten getan werden. Das Zertifikat kann also in einer Laufzeit verifiziert werden, die polynomiell in $\text{size}(I)$ ist.

Zu zeigen: $\textsc{Dominating Set} \in \mathcal{NP}$.

Für eine Instanz I von (DS) gilt: $\text{size}(I) = \mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$. Ein mögliches Zertifikat für (DS) ist eine Menge $D \subseteq V$ (die kann in $\mathcal{O}(|V|)$ kodiert werden). Um zu überprüfen, ob D ein Dominating Set ist, prüfe für jeden Knoten $v \in V$, ob es eine Kante $\{u, v\} \in E$ gibt mit $u \in D$. Dies kann in $\mathcal{O}(|V|^2|)$ Schritten getan werden. Das Zertifikat kann also in einer Laufzeit verifiziert werden, die polynomiell in $\text{size}(I)$ ist.

3. Vertex Cover ist sogar ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem (das dürfen Sie hier und auch künftig ohne Beweis verwenden). Beweisen Sie, dass auch Dominating Set $\mathcal{NP}$-vollständig ist, indem Sie eine Reduktion auf Vertex Cover angeben.

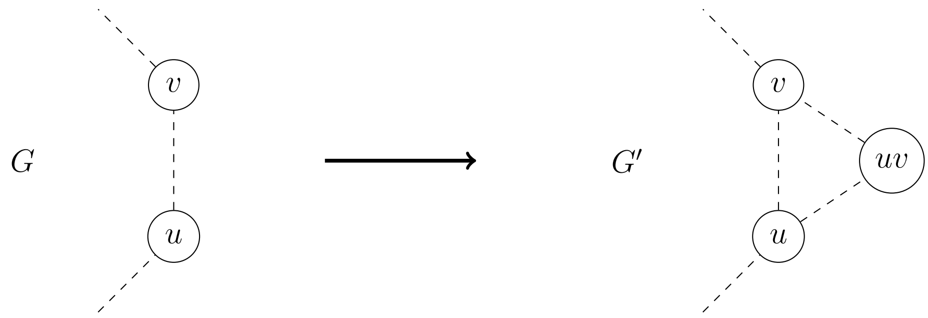
Unsere Formulierung der Aufgabenstellung war etwas schludrig. Wir wissen bereits, dass Vertex Cover (VC) $\mathcal{NP}$-vollständig ist und dass Dominating Set (DS) in $\mathcal{NP}$ liegt. Nun soll gezeigt werden, dass (DS) ebenfalls $\mathcal{NP}$-vollständig ist, was natürlich nur funktioniert, indem man zeigt, dass sich ein bekanntes $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem (in diesem Fall (VC)) auf (DS) reduzieren lässt. Also hätte es korrekterweise heißen müssen: Beweisen Sie, dass auch (DS) $\mathcal{NP}$-vollständig ist, indem Sie eine Reduktion von(VC) auf (DS) angeben.

Zu zeigen: $(\text{VC}) \prec_p (\text{DS})$.

Angenommen, wir kennen einen polynomiellen Algorithmus, der entscheidet, ob es in einem Graphen ein Dominating Set einer bestimmten Größe gibt. Sei nun $G = (V, E)$ ein Graph, für den wir entscheiden wollen, ob es in G ein Vertex Cover C mit $|C| = k \leq |V|$ gibt.

Idee: Sowohl in (VC) als auch in (DS) wird eine Teilmenge der Knotenmenge gesucht, wobei diese Menge in einem Fall alle Kanten des Graphen und im anderen Fall alle Knoten des Graphen „überdecken“ bzw. „dominieren“ soll. Deswegen entscheiden wir (VC) in G, indem wir G in einen neuen Graphen G' transformieren, der für jede Kante aus G einen Extraknoten enthält, und dann (DS) in G' entscheiden.

Ausgehend von G konstruieren wir $G' = (V', E')$ wie folgt: E' enthält alle Kanten aus E. V' enthält alle Knoten aus V außer den isolierten Knoten (die also mit keiner Kante aus E inzident sind). Denn diese Knoten brauchen bei der Konstruktion eines Vertex Covers nicht berücksichtigt zu werden, müssten allerdings Element jedes Dominating Sets sein. Außerdem fügen wir für jede Kante $\{u, v\} \in E$ einen Knoten uv in V' ein sowie Kanten $\{u, uv\}$ und $\{v, uv\}$ in E'.



Dann gilt:

$$\exists \text{ Vertex Cover } C \text{ mit } |C| = k \text{ in } G \Leftrightarrow \exists \text{ Dominating Set } D \text{ mit } |D| = k \text{ in } G'.$$

„$\Rightarrow$“: Sei C Vertex Cover in G mit $|C| = k$, d. h., jede Kante aus E hat mindestens einen Endknoten in C. Dann ist C ein Dominating Set in G'. Betrachte einen Knoten v' aus V'. Wenn v' ein „alter“ Knoten aus V ist, dann muss v' mit einer Kante $\{v', u\}$ aus E inzident sein (denn die isolierten Knoten sind rausgeflogen). Da C Vertex Cover in G, muss entweder $v' \in C$ oder $u \in C$ gelten. v' ist also entweder selbst in C oder ist inzident zu einem Knoten u in C (wir sagen dann: v' wird von u dominiert). Wenn v' ein „neuer“ Knoten in V' ist, also für eine Kante aus E eingefügt wurde, dann ist v' mit beiden Endknoten dieser Kante inzident, siehe Konstruktion von G'. Da mindestens einer dieser Endknoten in C ist, wird v' von diesem Knoten in G' dominiert.

„$\Leftarrow$“: Sei D Dominating Set in G' mit $|D| = k$. Dann konstruieren wir daraus ein Vertex Cover C mit $|C| \leq k$ in G. Sei $e = \{u, v\}$ eine Kante in E. Da D Dominating Set in G' ist, muss der Knoten $uv \in V'$ entweder selbst in D sein oder von einem der Knoten u und v dominiert werden. Liegt uv selbst in D, dann nimm entweder u oder v in die Menge C auf. Wird uv von u (oder v) in G' dominiert, dann füge u (bzw. v) in C ein. In beiden Fällen liegt dann mindestens einer der Endknoten der Kante $e = \{u, v\}$ in C. Da dies für alle Kanten aus E gilt, ist C Vertex Cover in G.