Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Station 3: Zertifikate

Diskutieren Sie folgende Fragen in der Gruppe und tragen Sie Ihre Antworten auf dem Arbeitsblatt ein. Das ausgefüllte Blatt heften Sie anschließend in Ihre Gruppenmappe.

Problem 1: Graph Coloring

Input: Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, ein Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten, eine natürliche Zahl $K \leq n$.

Frage: Gibt es eine Färbung von G mit höchstens K Farben? Eine *Färbung* (*Graph Coloring*) von G mit K Farben ist eine Funktion $\chi : V \to \{1, \dots, K\}$ mit $\chi(u) \neq \chi(v)$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E$.

Problem 2: LP-Optimality

Input: Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, Vektoren $b, c \in \mathbb{Z}^m$ und ein Punkt $x^* \in \mathbb{Q}^n$.

Frage: Ist x^* Optimallösung des linearen Programms max $c^T x$, $Ax \leq b$?

Problem 3: ILP-Feasibility

Input: Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ein Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$.

Frage: Gibt es einen ganzzahligen Punkt $x \in \mathbb{Z}^n$, der das Ungleichungssystem

$$Ax = b \ \wedge \ x \geq 0$$

erfüllt?

---

1. Beweisen Sie, dass Graph Coloring in $\mathcal{NP}$ ist. Beschreiben Sie dazu genau, wie ein Zertifikat für das Problem beschaffen sein soll und wie der Algorithmus aussieht, der das Zertifikat in polynomieller Zeit prüft.

Bitte wenden!

2. Überlegen Sie sich ein mögliches Zertifikat für das Problem LP-Optimality! Zeigen Sie, dass das Problem in $\mathcal{NP}$ ist.

3. Zeigen Sie, dass ILP-Feasibility in $\mathcal{NP}$ ist. Welche Schwierigkeit könnte beim Zertifikat auftreten?