Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Station 4: Approximation und Nichtapproximierbarkeit

Diskutieren Sie folgende Fragen in der Gruppe und tragen Sie Ihre Antworten auf dem Arbeitsblatt ein. Das ausgefüllte Blatt heften Sie anschließend in Ihre Gruppenmappe.

Problem 1: Hamilton-Kreis

Input: Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, ein Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten.

Frage: Gibt es in G einen Hamilton-Kreis? Ein Hamilton-Kreis ist ein Kreis in G, der jeden Knoten in V genau einmal durchläuft.

Problem 2: Traveling Salesman (TSP), Evaluation Version

Input: Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, der vollständige Graph $G = (V, E) = K_n$ mit n Knoten und m Kanten, eine Gewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{N}_0$.

Aufgabe: Bestimme die Länge eines (bezüglich c) kürzesten Hamilton-Kreises in G. Ein Hamilton-Kreis ist ein Kreis in G, der jeden Knoten aus V genau einmal durchläuft. Seine Länge ist die Summe aller Kantenlängen der im Kreis enthaltenen Kanten.

Ein *polynomieller* Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt *k-Approximation* für TSP, wenn er für den oben bestimmten Input einen Hamilton-Kreis in G bestimmt (oder meldet, dass keiner existiert), und wenn für den Zielfunktionswert $c_{\mathcal{A}}$ des von $\mathcal{A}$ bestimmten Hamilton-Kreises gilt:

$$c_{\mathcal{A}} \leq k \cdot c_{\text{opt}}$$

Dabei ist c_{opt} die Länge eines kürzesten Hamilton-Kreises in G (oder ∞, falls kein Hamilton-Kreis in G existiert).

1. Zeigen Sie: Falls es für ein $k \geq 1$ eine k-Approximation für TSP gibt, so gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass Hamilton-Kreis ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem ist.

   Tipp: Eine k-Approximation könnte man benutzen, um einen polynomiellen Algorithmus für Hamilton-Kreis zu konstruieren, indem man die Kantengewichte für TSP abhängig von k geeignet wählt. Arbeiten Sie diese Idee genau aus, und zeigen Sie, wie daraus die Behauptung folgt.

Wir zeigen, dass aus der Existenz einer k-Approximation mit $k \geq 1$ für das allgemeine TSP-Problem folgt, dass Hamilton-Kreis in polynomieller Zeit gelöst werden kann. Da Hamilton-Kreis $\mathcal{NP}$-vollständig ist, könnten wir dann jedes Problem aus $\mathcal{NP}$ in polynomieller Zeit lösen, d.h., es würde gelten: $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Angenommen, es gäbe einen Approximationsalgorithmus A mit Approximationsfaktor k für TSP. Dann entscheidet das folgende Verfahren N, ob es einen Hamilton-Kreis in einem gegebenen Graphen $G = (V = \{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ gibt:

a) Konstruiere ausgehend von G den vollständigen, gewichteten Graphen G' mit Knotenmenge V, in dem das Kantengewicht d_{ij} von Kante $\{v_i, v_j\}$ definiert ist als

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \{v_i, v_j\} \in E \\ k \cdot n, & \text{wenn } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}$$

b) Wende Algorithmus A auf G' an. Wenn die gefundene TSP-Tour in G' die Länge n hat, dann akzeptiere, sonst nicht.

Der Graph G' kann in polynomieller Zeit aus G konstruiert werden. Wir zeigen, dass gilt:

$$\exists \text{ Hamilton-Kreis in } G \Leftrightarrow N \text{ akzeptiert } G'.$$

„⇒“: Wenn G einen Ham.-Kreis enthält, dann hat die optimale TSP-Tour in G' die Länge n. Der Algorithmus A muss also eine TSP-Tour in G' mit Länge $\leq k \cdot n$ liefern. Diese Tour kann folglich keine Kante mit Länge $k \cdot n$ enthalten, weil sonst die Gesamtlänge der Tour $> k \cdot n$ wäre. Sie besteht deshalb ausschließlich aus Kanten der Länge 1 und hat somit Gesamtlänge n, weshalb N den Graphen G' akzeptiert.

„⇐“: Wenn N die Eingabe G' akzeptiert, dann hat die von A berechnete TSP-Tour in G' die Länge n. Da G' lediglich Kanten mit Länge 1 bzw. $k \cdot n$ enthält und jede TSP-Tour in G' alle n Knoten im Graphen durchlaufen muss, kann sich die von A berechnete Tour lediglich aus Kanten der Länge 1 zusammensetzen. Das bedeutet wiederum (nach Konstruktion von G'), dass G einen Ham.-Kreis enthält.