Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Station 4: Approximation und Nichtapproximierbarkeit

Diskutieren Sie folgende Fragen in der Gruppe und tragen Sie Ihre Antworten auf dem Arbeitsblatt ein. Das ausgefüllte Blatt heften Sie anschließend in Ihre Gruppenmappe.

Problem 1: Hamilton-Kreis

Input: Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, ein Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten.

Frage: Gibt es in G einen Hamilton-Kreis? Ein Hamilton-Kreis ist ein Kreis in G, der jeden Knoten in V genau einmal durchläuft.

Problem 2: Traveling Salesman (TSP), Evaluation Version

Input: Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, der vollständige Graph $G = (V, E) = K_n$ mit n Knoten und m Kanten, eine Gewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{N}_0$.

Aufgabe: Bestimme die Länge eines (bezüglich c) kürzesten Hamilton-Kreises in G. Ein Hamilton-Kreis ist ein Kreis in G, der jeden Knoten aus V genau einmal durchläuft. Seine Länge ist die Summe aller Kantenlängen der im Kreis enthaltenen Kanten.

Ein *polynomieller* Algorithmus $\mathcal{A}$ heißt *k-Approximation* für TSP, wenn er für den oben bestimmten Input einen Hamilton-Kreis in G bestimmt (oder meldet, dass keiner existiert), und wenn für den Zielfunktionswert $c_{\mathcal{A}}$ des von $\mathcal{A}$ bestimmten Hamilton-Kreises gilt:

$$c_{\mathcal{A}} \leq k \cdot c_{\text{opt}}$$

Dabei ist c_{opt} die Länge eines kürzesten Hamilton-Kreises in G (oder ∞, falls kein Hamilton-Kreis in G existiert).

1. Zeigen Sie: Falls es für ein $k \geq 1$ eine k-Approximation für TSP gibt, so gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass Hamilton-Kreis ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem ist.

   Tipp: Eine k-Approximation könnte man benutzen, um einen polynomiellen Algorithmus für Hamilton-Kreis zu konstruieren, indem man die Kantengewichte für TSP abhängig von k geeignet wählt. Arbeiten Sie diese Idee genau aus, und zeigen Sie, wie daraus die Behauptung folgt.