Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Der Kou-Markovsky-Berman-Algorithmus für Steinerbaum

Im Folgenden finden Sie eine formale Beschreibung des gewählten Approximationsalgorithmus. Arbeiten Sie die Beschreibung durch, machen Sie sich Notizen. Versuchen Sie, die Schritte des Algorithmus und die Beweise mit Hilfe von kleinen Skizzen nachzuvollziehen. Überlegen Sie sich, wie Sie die Erklärung dieses Algorithmus gestalten (Struktur, wichtige Ideen, Resultate). Wenn Sie Fragen haben, wenden Sie sich an Ihre Betreuer.

Problem: Steinerbaum

Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$, eine Terminalmenge $T \subseteq V$.

Aufgabe: Finde einen zusammenhängenden Subgraphen von G, der alle Knoten aus T enthält und bezüglich c möglichst geringe Kosten besitzt, oder stelle fest, dass kein solcher Subgraph existiert.

Ein *Steinerbaum* in G zur Terminalmenge T ist ein Baum in G, der alle Knoten in T enthält. Die Knoten aus $V \setminus T$, die in einem Steinerbaum enthalten sind, bezeichnet man als *Steinerknoten* dieses Steinerbaums. Im Folgenden nehmen wir an, dass der gegebene Graph G zusammenhängend ist, das lässt sich etwa mit einer Breitensuche leicht nachprüfen.

Die Grundidee des Kou-Markovsky-Berman-Algorithmus (KMB-Algorithmus) besteht darin, den gegebenen Graphen $G = (V, E)$ durch einen Hilfsgraphen G_T zu ersetzen, der nur noch Terminale als Knoten enthält. Dazu definieren wir zunächst den Begriff des Distanzgraphen.

Definition 1
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und $T \subseteq V$. Der Distanzgraph von G über T bezüglich c ist der vollständige Graph $G_T = (T, E_T)$ zusammen mit einer Distanzfunktion $c_T : E_T \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$, die wie folgt definiert ist:

$$c_T(\{u, v\}) := \mathrm{dist}_G(u, v),$$

wobei $\mathrm{dist}_G(u, v)$ die Länge eines kürzesten u-v-Weges in G ist.

Der KMB-Algorithmus arbeitet wie folgt:

1. Bestimme zu G, T und c den Distanzgraphen G_T mit Distanzfunktion c_T. Speichere außerdem zu jedem Paar von Terminalen $u, v \in T$ einen kürzesten u-v-Weg W_{uv} in G ab.
2. Bestimme in G_T einen minimalen spannenden Baum B_T. (Welche Algorithmen kennen Sie dafür? Was wissen Sie über deren Laufzeit?)

3. Erzeuge einen Subgraphen $G_S = (V, E_S)$ von G wie folgt: Für jede Kante $\{u, v\}$ in B_T füge einen kürzesten u-v-Weg zu E_S hinzu, d. h.,

$$E_S := \bigcup_{e \in B_T} W_e.$$

4. Bestimme einen minimalen spannenden Baum B_S in G_S, verwende dafür als Längenfunktion c.
5. Verkleinere den Steinerbaum B_S soweit wie möglich, indem sukzessive Blätter (und die dazugehörigen Kanten) gelöscht werden, die keine Terminale sind.

Für diesen Algorithmus gilt folgende Approximationsaussage:

Satz 2
Sei B_{KMB} der vom Algorithmus berechnete Steinerbaum in G und B_{opt} ein optimaler Steinerbaum. Weiter sei b die Anzahl der Blätter in B_{opt}. Dann gilt

$$c(B_{KMB}) \leq 2\,(1 - {}^{1}\!/\!{}_{b})\, c(B_{\text{opt}}),$$

insbesondere ist der KMB-Algorithmus eine 2-Approximation für das Steinerbaum-Problem.

Im Beweis dieses Satzes verwenden wir sogenannte *Eulertouren*, das sind Kantenzüge durch einen Graphen, die jede Kante genau einmal enthalten.

Definition 3
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine *Eulertour* in G ist ein geschlossener Weg, der jede Kante von G genau einmal enthält (Knoten dürfen mehrfach benutzt werden). Diese Definition gilt ebenso für Graphen, die Multikanten enthalten (also mehrere parallele Kanten, die dann natürlich alle in der Eulertour genau einmal enthalten sein müssen und ggf. auch alle für die Länge einer solchen Tour mitgezählt werden).

Das folgende Resultat geht auf Leonhard Euler zurück (Sie haben bestimmt schon vom „Königsberger Brückenproblem“ gehört):

Satz 4
Ein Graph $G = (V, E)$ enthält genau dann eine Eulertour, wenn der Grad aller seiner Knoten gerade ist (ein solcher Graph heißt eulersch*).*

Beweis. Wir skizzieren kurz einen Algorithmus, der in einem eulerschen Graphen eine Eulertour konstruiert:

1. Starte mit einem beliebigen Knoten v mit $\deg(v) > 0$, dann ist $\deg(v) \geq 2$.
2. Wähle eine noch nicht benutzte, mit v inzidente Kante. Für den Endknoten w dieser Kante gilt dann: Entweder ist w noch zu mindestens einer weiteren, nicht benutzten Kante inzident, in diesem Fall starte mit w statt v erneut. Oder es gibt keine mit w inzidente Kante, die noch nicht im Kantenzug verwendet wurde – dann muss w aber der Startknoten des Prozesses gewesen sein, da von jedem anderen Knoten jeweils eine gerade Anzahl Kanten „verbraucht“ worden ist und alle Knoten geraden Grad haben. Es schließt sich damit ein Kreis (evtl. zerfällt dieser sogar in mehrere Kreise).

3. Durch Wiederholen dieses Algorithmus erhält man eine Zerlegung des Graphen in kantendisjunkte Kreise, die alle Kanten des Graphen überdecken. Wir fügen diese Kreise nun zu einer Eulertour zusammen: Wähle einen Knoten, der in zwei Kreisen oder Subtouren enthalten ist, und füge die beiden Kreise an dem Knoten zu einer Tour zusammen. Wiederhole das so lange, bis alle Kreise und Subtouren zu einer Eulertour zusammengefügt sind. □

Jetzt haben wir alle Hilfsmittel beisammen, um die Approximationsgüte des KMB-Algorithmus zu beweisen.

Beweis. Sei B_{opt} ein optimaler Steinerbaum in G, b die Anzahl seiner Blätter und B' der Subgraph von G, der durch Verdoppelung aller Kanten von B_{opt} entsteht. Sei R eine Eulertour durch B' (eine solche existiert, da nach der Verdoppelung der Kanten jeder Knoten geraden Grad hat, der Graph B' also eulersch ist). Die Tour R setzt sich zusammen aus b Teilstücken, die jeweils von einem Terminalblatt zu einem anderen führen, ohne dass dazwischen ein weiteres Terminalblatt besucht wird. Es sei R' ein Subgraph von B', der aus R entsteht, indem das längste solche Teilstück entfernt wird. Dann gilt

$$c(R) - c(R') \geq \frac{c(R)}{b}.$$

Damit folgt

$$c(R') \leq c(R) - \frac{c(R)}{b} = \left(1 - \frac{1}{b}\right) c(R) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right) c(B_{\text{opt}}).$$

Seien nun $v_1, v_2, \ldots, v_{|T|}$ die Terminale in der Reihenfolge, in der sie in R' besucht werden (wobei v_1 ein beliebiger Endpunkt von R' ist, d. h. einer der Endknoten des aus R entfernten Teilstücks). Dann ist $B^* := (v_1, v_2, \ldots, v_{|T|-1}, v_{|T|})$ ein Weg im Distanzgraphen G_T, der alle Knoten enthält, also ein spannender Baum in G_T. Sei B_T der minimale Spannbaum in G_T aus dem Algorithmus, dann gilt

$$c(B_T) \leq c(B^*) \leq c(R') \leq 2\left(1 - \frac{1}{b}\right) c(B_{\text{opt}}).$$

Da nach dem Algorithmus der Steinerbaum B_{KMB} höchstens so lang ist wie B_T, zeigt das die behauptete Approximationsgüte. □