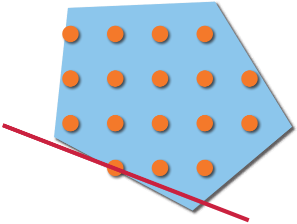
Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Branch and Bound – Grundlagen

Barbara Langfeld, Michael Ritter, Barbara Wilhelm

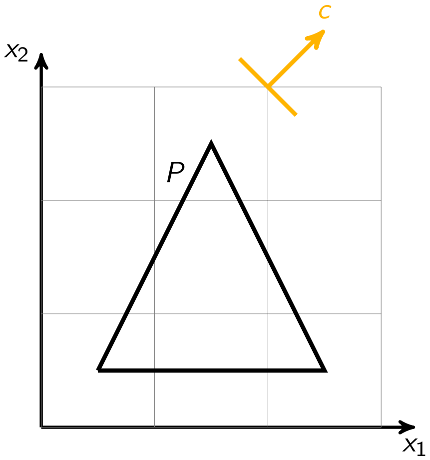
Technische Universität München

20A



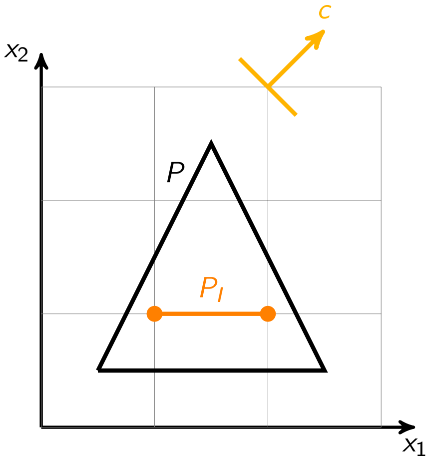
Ganzzahlige Programmierung

$$\max\ c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$
$$x \in \mathbb{Z}^n$$



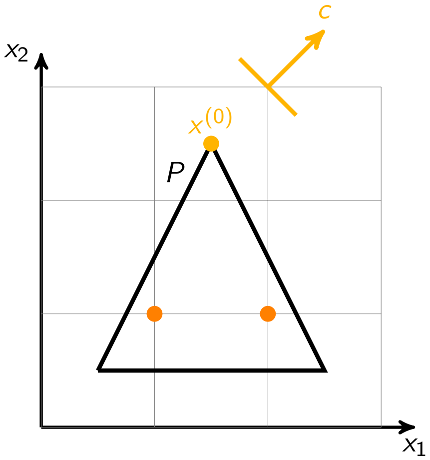
Ganzzahlige Programmierung

$$\max\ c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$
$$x \in \mathbb{Z}^n$$



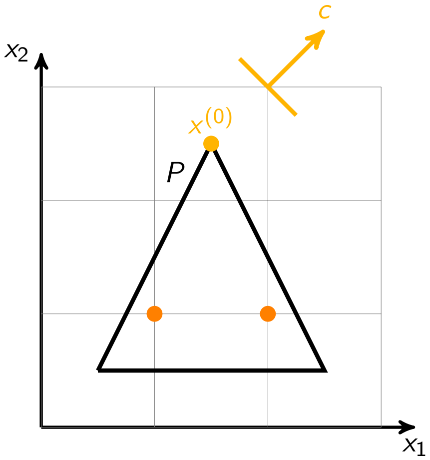
Branching

- LP-Relaxation: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$



Branching

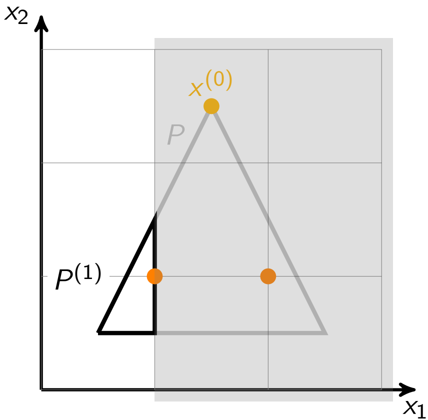
- LP-Relaxation: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$
- $x_1^{(0)} \notin \mathbb{Z}$ ➡ Teilprobleme:



Branching

- LP-Relaxation: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$
- $x_1^{(0)} \notin \mathbb{Z}$ ➡ Teilprobleme:

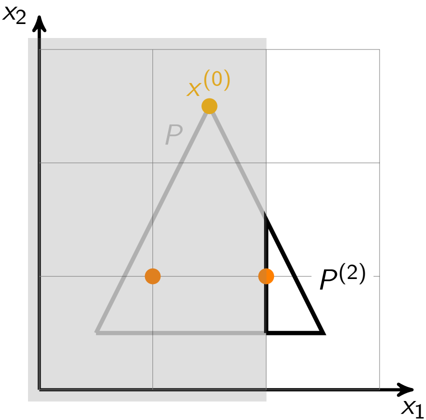
$$x_1 \leq \left\lfloor x_1^{(0)} \right\rfloor = 1$$



Branching

- LP-Relaxation: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$
- $x_1^{(0)} \notin \mathbb{Z}$ ➡ Teilprobleme:

$$\begin{aligned} & x_1 \leq \left\lfloor x_1^{(0)} \right\rfloor = 1 \\ \text{oder} \quad & x_1 \geq \left\lceil x_1^{(0)} \right\rceil = 2 \end{aligned}$$



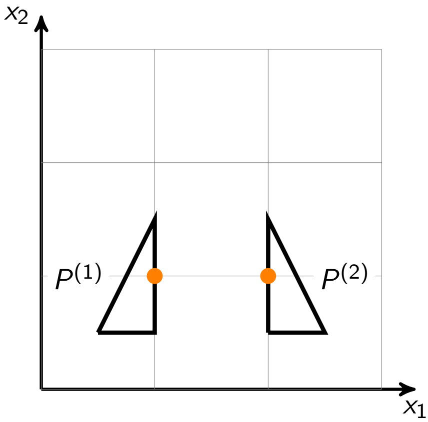
Branching

- LP-Relaxation: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$
- $x_1^{(0)} \notin \mathbb{Z}$ ➡ Teilprobleme:

$$x_1 \leq \left\lfloor x_1^{(0)} \right\rfloor = 1$$

$$\text{oder} \quad x_1 \geq \left\lceil x_1^{(0)} \right\rceil = 2$$

- für jedes Teilproblem: Prozedur wiederholen



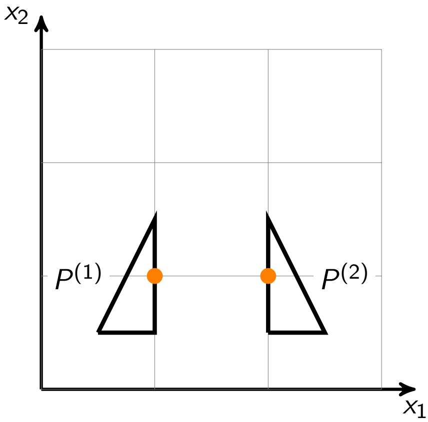
Branching

- LP-Relaxation: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$
- $x_1^{(0)} \notin \mathbb{Z}$ ➡ Teilprobleme:

$$x_1 \leq \left\lfloor x_1^{(0)} \right\rfloor = 1$$

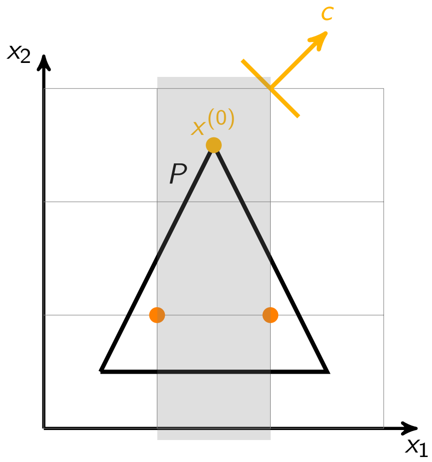
oder $$x_1 \geq \left\lceil x_1^{(0)} \right\rceil = 2$$

- für jedes Teilproblem: Prozedur wiederholen



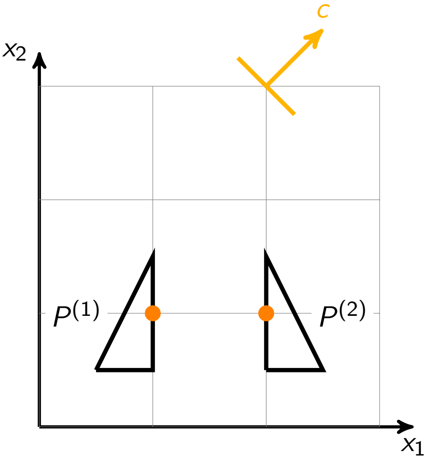
➡ Branching

Bounding



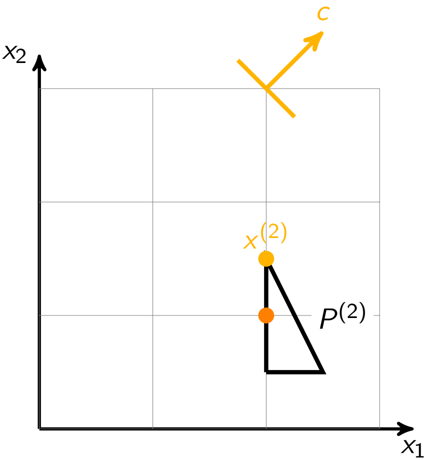
beste Lösung: ?? Zielfunktionswert: ??

Bounding



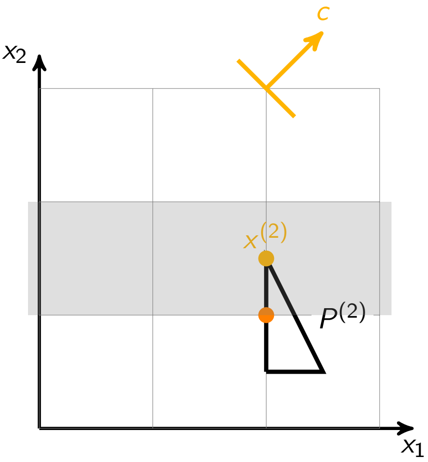
beste Lösung: ?? Zielfunktionswert: ??

Bounding



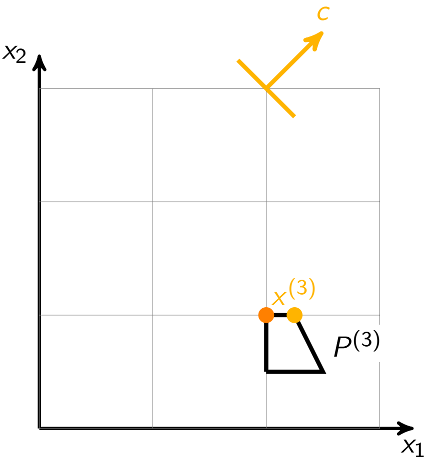
beste Lösung: ?? Zielfunktionswert: ??

Bounding



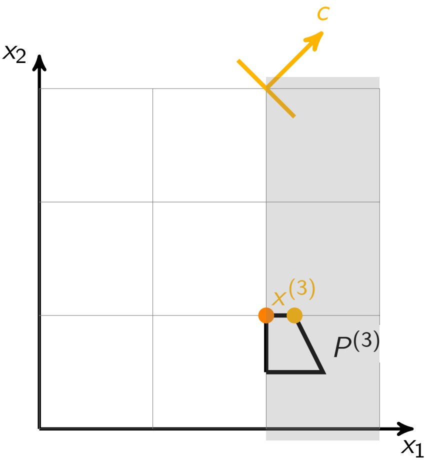
beste Lösung: ?? Zielfunktionswert: ??

Bounding



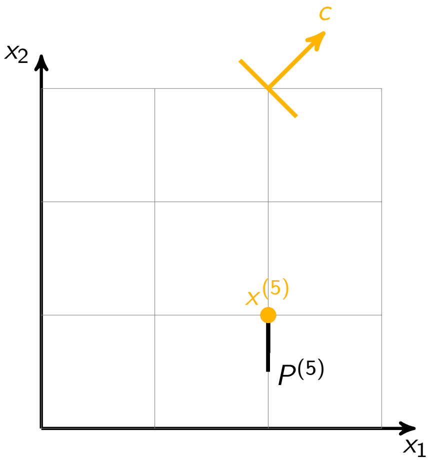
beste Lösung: ?? Zielfunktionswert: ??

Bounding



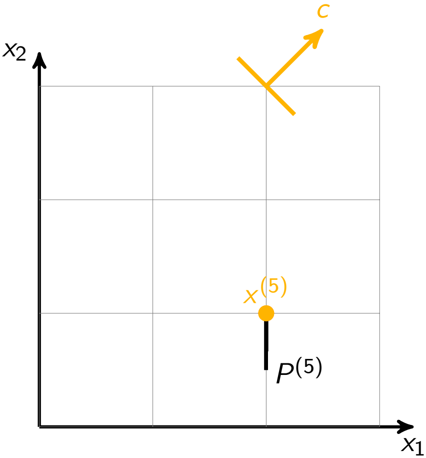
beste Lösung: ?? Zielfunktionswert: ??

Bounding



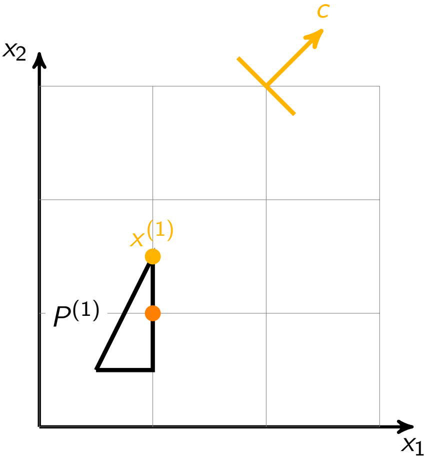
beste Lösung: ?? Zielfunktionswert: ??

Bounding



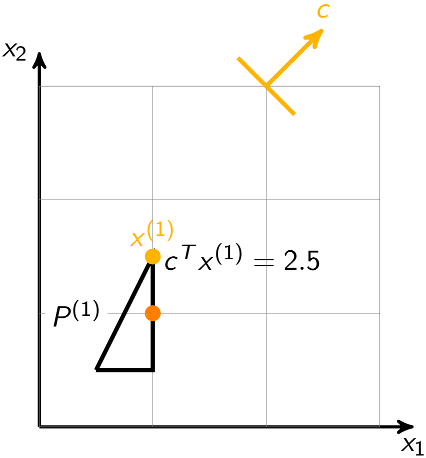
beste Lösung: $(2,1)^T$ Zielfunktionswert: 3

Bounding

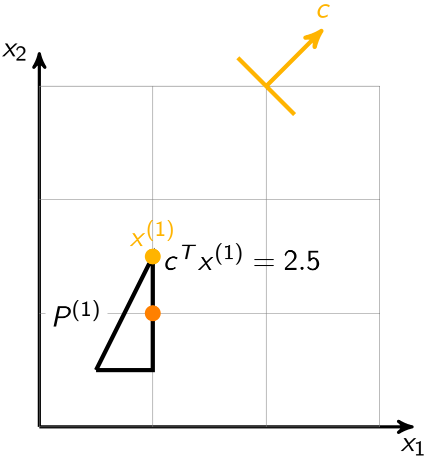


beste Lösung: $(2,1)^T$ Zielfunktionswert: 3

Bounding

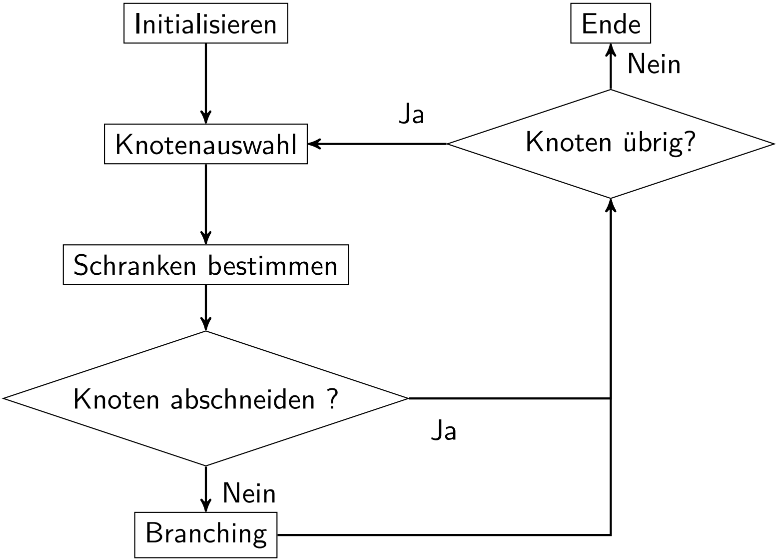


beste Lösung: $(2,1)^T$ Zielfunktionswert: 3



➡ Bounding

Branch & Bound: Überblick



Branch & Bound: Bestandteile

Knotenauswahl: Welches Teilproblem zuerst?

Schranken: Woher gute globale und lokale Schranken?

Abschneiden: Baum möglichst klein halten!

Branching: Wieviele und welche Teilprobleme?

Branch & Bound für ILP

Knotenauswahl **Schranken** **Abschneiden** **Branching**

allgemein

- zulässige Lösung finden
- Schranken verbessern
- Baum klein halten
- gute Lösung finden

für ILP

- Teilproblem ➡ Teil-Polyeder
- Güteschätzung: Dualitätslücke

Branch & Bound für ILP

Knotenauswahl **Schranken** **Abschneiden** **Branching**

allgemein

- globale untere Schranke: Mindestwert der Lösung
- lokale obere Schranken: Höchstwert der Lösung in Teilproblem
- gute Schranken ➡ kleiner Baum
- Rechenaufwand

für ILP

- global: zulässige ganzzahlige Lösung, Heuristik
- lokal: LP-Relaxation

Branch & Bound für ILP

Knotenauswahl **Schranken** **Abschneiden** **Branching**

allgemein

- lokale Schranke $<$ globale Schranke ➡ Abschneiden
- Baum klein halten
- evtl. vorzeitiger Abbruch ➡ Güte der Lösung?

für ILP

- Vergleich der Schranken

Branch & Bound für ILP

Knotenauswahl **Schranken** **Abschneiden** **Branching**

allgemein

- wenige Zweige, kleiner Baum
- schnell Lösung finden
- gute Schranken

für ILP

- fraktionelle Komponente wählen
- auf- und abrunden, evtl. mehrere Zweige
- andere Ideen ➡ kommende Stunden

Zusammenfassung: Branch & Bound

allgemein

- exakter Algorithmus
- Prototyp, Details müssen festgelegt werden
- entscheidend: gute Schranken, Branching, Knotenauswahl

Zusammenfassung: Branch & Bound

allgemein

- exakter Algorithmus
- Prototyp, Details müssen festgelegt werden
- entscheidend: gute Schranken, Branching, Knotenauswahl

für ILP

- wichtigster ILP-Algorithmus in der Praxis
- Performancegarantie: Dualitätslücke
- problemangepasste Strategien hilfreich
- Kombinationen mit Heuristiken, Approximationsalgorithmen, Schnittebenen-Verfahren