Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Special Ordered Sets vom Typ 1

1 Problemstellung

Bisher haben wir für die Erzeugung neuer Teilprobleme immer ein „branchen auf Variablen“ verwendet. So ein Variablen-Branch für eine Variable x_j bedeutet, aus einem LP max $c^T x$, $Ax \leq b$ und einer Lösung x^* der LP-Relaxation erzeugt man zwei neue Teilprobleme folgender Form:

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x_j \leq \left\lfloor x_j^* \right\rfloor \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x_j \geq \left\lceil x_j^* \right\rceil \end{aligned}$$

Bei vielen Problemklassen kann es aber hilfreich sein, andere Branching-Strategien zu verfolgen. Beispielhaft lernen wir heute die Special Ordered Sets vom Typ 1 (SOS 1) und das Orbital Branching kennen.

2 SOS1-Bedingungen

Wir befassen uns zunächst mit den SOS 1-Bedingungen. In vielen ILPs gibt es „Auswahlbedingungen“, die modellieren, dass man sich für eine von mehreren Möglichkeiten entscheiden muss. Beispielsweise tauchen solche Bedingungen bei der Standortplanung auf (welche von mehreren alternativen Maschinen bzw. Fabriken soll gebaut werden?), bei der Produktionsplanung (welcher Produktionsumfang wird gewählt, wenn man nur in bestimmten Batchgrößen/Stückzahlen produzieren kann?) oder beim Scheduling (zu welcher von mehreren möglichen Zeitpunkten soll ein Zug abfahren?). Wir wählen als Beispiel eine Produktionsplanung: Es sollen Produkte hergestellt werden, deren Produktion nicht in beliebigen Einheiten möglich ist. (Ein Beispiel dafür ist die Papierproduktion: Papier wird in großen Rollen hergestellt, aus denen man dann die gewünschten Größen schneidet. Will man also z. B. nur A4-Papier produzieren, so kann man nicht jede beliebige Seitenzahl herstellen.) Die möglichen Produktionsgrößen seien $a_1 \leq \cdots \leq a_n$. Die Produktionsgröße beeinflusst nicht nur die Zielfunktion, sondern auch verschiedene Nebenbedingungen (bestimmte Paketgrößen lassen sich etwa direkt auf einer Maschine verarbeiten, andere benötigen erst einen Zwischenschritt, der Bedarf an Arbeitskräften ändert sich, es fallen unter Umständen Kosten für Lagerung an usw.). Wir fokussieren hier nur auf die Frage, welche Produktionsgröße wir wählen sollen und stellen das

LP deshalb vereinfacht dar. Die Variablen $x_1, \dots, x_n$ seien 0-1-Variablen mit der Bedeutung

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{Produktionsgröße } a_i \text{ wird gewählt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir unterstellen, dass wir nur genau eine Produktionsgröße herstellen können (die Produktion ein zweites Mal anlaufen zu lassen verbieten die hohen Setup-Kosten). Für die Stückzahl an Material, das wir dann produziert haben, verwenden wir der Einfachheit halber eine eigene Variable $p \in \mathbb{R}$ (die produzierte Menge). Außerdem hat das ILP noch weitere Variablen $y \in \mathbb{R}^k$ und Nebenbedingungen, die uns hier nicht interessieren sollen. Zusammen sieht das ganze dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \min\ & f(x, y, p) \\ & A(x, y, p)^T \leq b \\ & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = p \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

Als SOS 1-Bedingung bezeichnet man eine Bedingung, die ganzzahlige 0-1-Variablen mit einer Konvexitätsbedingung verknüpft, also die letzten drei Zeilen dieses ILP, falls $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ (die Variablen sind also nach Größe der a_i geordnet, daher die Bezeichnung als „ordered set“). Die Variablen $x_1, \dots, x_n$ wird dann *special ordered set vom Typ 1* (kurz *SOS1*) genannt.

3 SOS1-Branching

Löst man die LP-Relaxation des obigen Problems, so erhält man eine Lösung $(x^*, y^*, p^*) \in \mathbb{R}^{n+k+1}$, wobei (wegen $0 \leq x \leq \mathbb{1}$) die Variable p eine Konvexkombination der a_i darstellt. Der Wert von p gibt damit an, welche Kombination der a_i (also welche Bestellmenge) eigentlich optimal wäre. Das LP „sagt“ uns also schon, „wo es hinwill“. Beim Variablen-Branching auf den x_i würden wir diese Information aber nicht verwenden. Das SOS 1-Branching nutzt im Gegensatz dazu die Ordnung aus, die durch den Gewichtsvektor a gegeben ist: Sei i_0 ein Index, so dass

$$a_{i_o} \leq p^* < a_{i_0+1}$$

gilt, d. h. die „optimale“ Bestellmenge liegt zwischen a_{i_0} und a_{i_0+1}. Dann erzeugen wir zwei neue Teilprobleme, indem wir die Bedingungen „Die Bestellmenge beträgt höchstens a_{i_0}“ und „Die Bestellmenge beträgt mindestens a_{i_0+1}“ zur Aufteilung benutzen. Ausformuliert als Bedingung an die x_i bedeutet das:

$$\begin{aligned} \min\ & f(x,y,p) \\ & A(x,y,p)^T \le b \\ & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = p \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x_{i_0+1} = \cdots = x_n = 0 \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min\ & f(x,y,p) \\ & A(x,y,p)^T \le b \\ & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = p \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x_1 = \cdots = x_{i_0} = 0 \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

Achtung: Eine Bedingung wie „Die Bestellmenge beträgt a_{i_0} oder a_{i_0+1}" kann man nicht verwenden! Das würde nämlich alle Fälle ausschließen, in denen die Bestellmenge weder a_{i_0} noch a_{i_0+1} beträgt, wäre also keine Partition des Problems. Damit könnte man nicht nur die optimale Lösung „verlieren", sondern unter Umständen auch lauter unzulässige Teilprobleme erzeugen.

4 Vorteile des SOS 1-Branchings

- Statt nur einer Variablen werden gleich mehrere auf 0 gesetzt.
- Die Informationen aus der LP-Relaxation werden besser berücksichtigt.
- Diese Information kann sehr wichtig sein, besonders wenn die a_i nicht gleichmäßig verteilt sind.
- Die Idee ist ausbaubar zum SOS 2-Branching: Dabei dürfen statt einer maximal zwei der x_i gleichzeitig positiv sein, und in diesem Fall müssen die beiden Variablen benachbart sein (d. h., sie haben aufeinander folgende Indizes). Diese Idee eignet sich zur Modellierung stückweise linearer Funktionen.