Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

2-Matching Inequalities

1 Problembeschreibungen

Problem: Traveling Salesman
Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Distanzfunktion $d : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Aufgabe: Finde eine Tour, die alle Knoten des Graphen G genau einmal besucht und deren Länge bezüglich d möglichst klein ist, oder stelle fest, dass keine solche Tour existiert. Der Begriff „Tour“ wird hier synonym mit „Hamilton-Kreis“ verwendet.

Problem: 2-Matching
Input: Ein Graph $G = (V, E)$.

Aufgabe: Finde ein 2-Matching in G, das möglichst viele Kanten enthält. Ein 2-Matching ist eine Kantenmenge $M \subseteq E$ mit der Eigenschaft, dass jeder Knoten in V mit höchstens 2 Kanten aus M inzident ist.

2 Ungleichung

Die *2-Matching-Ungleichung* für $H \subseteq V$ mit $|H| \geq 3$ und $F \subseteq \delta(H)$ lautet:

$$\sum_{e \in E(H)} x_e + \sum_{e \in F} x_e \leq |H| + \left\lfloor \frac{|F|}{2} \right\rfloor$$

Für eine Knotenteilmenge H bezeichnen wir dabei mit $E(H)$ alle Kanten aus E, deren beide Enden in H liegen, und mit $\delta(H)$ alle Kanten aus E, bei denen genau ein Ende in H liegt:

$$E(H) := \{e \in E : |e \cap H| = 2\}$$
$$\delta(H) := \{e \in E : |e \cap H| = 1\}$$

3 Gültigkeit der Ungleichung

Definition 1
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP sei $\mathcal{T}(G)$ die Menge aller TSP-Touren in G. Für jede Tour $\tau \in \mathcal{T}(G)$ bezeichnen wir mit $x^{(\tau)} \in \{0, 1\}^{|E|}$ den Inzidenzvektor der Kanten, die in

der Tour τ verwendet werden. Dann heißt das Polytop

$$P_{TSP}(G) := \operatorname{conv}\left\{x^{(\tau)} : \tau \in \mathcal{T}(G)\right\}$$

das *TSP-Polytop* zum Graphen G. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir auch einfach P_{TSP}.

Satz 2
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP, beliebiges $H \subseteq V$ mit $|H| \geq 3$ und $F \subseteq \delta(H)$ ist die 2-Matching-Ungleichung zu H und F eine gültige Ungleichung für das TSP-Polytop $P_{TSP}(G)$.

Beweis. Sei eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP gegeben und sei $H \subseteq V$ und $F \subseteq \delta(H)$. Jede TSP-Tour ist ein 2-Matching, in dem jeder Knoten mit genau zwei Matchingkanten inzident ist.

Sei nun $M \subseteq E$ eine TSP-Tour. Die Tourkanten, die mit Knoten aus H inzidieren, lassen sich unterscheiden in Kanten, die innerhalb von H verlaufen (d. h. $E(H) \cap M$), Kanten aus F (d. h. $F \cap M$) und Kanten, die einen Endknoten in H und einen außerhalb von H haben, die jedoch nicht in F liegen. Summiert man nun über die Knotengrade der Knoten in H bezüglich der Tourkanten, so erhält man deshalb

$$2\,|E(H) \cap M| + |F \cap M| \leq \sum_{v \in H} \deg_M(v),$$

weil jede Kante aus $E(H) \cap M$ zweimal und jede Kante aus $F \cap M$ einmal in die Knotengradsumme eingeht. Es gilt also

$$2\,|E(H) \cap M| + 2\,|F \cap M| \leq \sum_{v \in H} \deg_M(v) + |F \cap M| \leq \sum_{v \in H} \deg_M(v) + |F|\,.$$

Da M eine TSP-Tour ist, gilt wie schon oben erwähnt: $\sum_{v \in H} \deg_M(v) = 2\,|H|$. Nach Division obiger Ungleichung durch 2 und Abrunden der rechten Seite (die linke Seite ist immer ganzzahlig!) ergibt sich dann die gewünschte Ungleichung. Damit ist die Gültigkeit der 2-Matching-Ungleichung gezeigt. $\square$

4 Beispiel

Wie lauten die 2-Matching-Ungleichungen für den unten abgebildeten Graphen und das markierte H? Überzeugen Sie sich, dass die eingezeichnete TSP-Tour die Ungleichungen erfüllt. Finden Sie ein Beispiel (ganzzahlige Lösung, also Kantenmenge im Graphen), das zwar keine TSP-Tour darstellt, aber die 2-Matching-Ungleichungen erfüllt.