Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Capacity Inequalities für Vehicle Routing-Probleme

1 Problembeschreibung

Das *Capacitated Vehicle Routing Problem* ist eine Verallgemeinerung des Traveling Salesman Problems. Es modelliert die Belieferung mehrerer Kunden von einem gemeinsamen Depot aus. Für die Lieferung stehen K Fahrzeuge zur Verfügung, die alle eine Ladekapazität von C besitzen. Für jeden Kunden ist eine Nachfrage bekannt. Ziel ist es, für jedes der K Fahrzeuge eine Route anzugeben, auf der eine Warenmenge von maximal C ausgeliefert werden muss. Die Gesamtlänge aller Routen, die benötigt werden, um alle Kunden zu beliefern, soll dabei minimiert werden. Im Unterschied zum TSP gibt es also nicht nur eine Tour durch alle Knoten, sondern die Knotenmenge (die Kunden) wird von mehreren Touren abgedeckt, die alle von einem gemeinsamen Knoten (dem Depot) aus starten.

Problem: Capacitated Vehicle Routing (CVRP)

Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ (v_0 Depot), eine Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$, eine Nachfragefunktion $d : \{v_1, \ldots, v_n\} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$, eine Fahrzeugkapazität $C \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und eine maximale Fahrzeugzahl $K \in \mathbb{N}$.

Aufgabe: Finde Routen $R_1, \ldots, R_K$ (maximal K Stück) der Kapazität C, so dass die Routen alle Knoten in V enthalten und die Gesamtlänge aller Routen $\sum_{i=1}^{K} \sum_{e \in E(R_i)} c(e)$ möglichst klein ist, oder stelle fest, dass keine solche Routen existieren. Eine Route R_i der Kapazität C ist ein Kreis in G, der v_0 enthält und für den gilt, dass die besuchten Knoten zusammen eine Nachfrage von höchstens C haben, d. h., $\sum_{v \in V(R_i)} d(v) \leq C$.

Wir benutzen im Folgenden die Bezeichnung $V_0 := V \setminus \{v_0\}$ für die Menge der Kunden, der Knoten v_0 wird als „Depot“ bezeichnet. Mit $V(R)$ und $E(R)$ bezeichnen wir die zu einer Route R gehörigen Knoten bzw. Kanten, weiter ist für eine Knotenteilmenge H die Menge aller Kanten von E, von denen genau ein Ende in H liegt, definiert als

$$\delta(H) := \{e \in E : |e \cap H| = 1\}.$$

2 ILP-Modell

Wir betrachten zunächst ein mögliches ILP-Modell für das CVRP. Wie oben beschrieben bezeichnen wir als *Route* eine Teilmenge $R \subseteq E$ von Kanten, so dass der von R induzierte

Teilgraph ein Kreis ist, der den Knoten v_0 enthält, und so dass gilt:

$$\sum_{v \in V(R)} d(v) \leq C.$$

Dabei ist der Fall zugelassen, dass R nur einen Knoten v enthält und die Kante $\{v_0, v\}$ doppelt benutzt wird (als Hin- und Rückweg). In allen anderen Fällen erlauben wir keine Doppelnutzung von Kanten innerhalb einer Tour. Eine K-Route ist definiert als eine Menge von Routen $\{R_1, \ldots, R_K\}$, so dass jeder Knoten aus V_0 in genau einer Route enthalten ist (genauer: in genau einem von einer Route induzierten Subgraphen). Die Kosten einer K-Route seien die Summe der Kosten von $R_1, R_2, \ldots, R_K$.

Für die ILP-Modellierung verwenden wir Variablen $x \in \{0, 1, 2\}^{|E|}$, die für jede Kante $e \in E$ angeben, wie oft e in der K-Route vorkommt (der Wert 2 korrespondiert dabei zum Sonderfall, dass eine Kante Hin- und Rückweg zugleich ist). Jede zulässige Lösung des CVRP (also jede K-Route) muss dann die Gleichungen

$$\sum_{e \in \delta(\{v_i\})} x_e = 2 \quad \text{für alle } v_i \in V_0 \tag{1}$$

$$\sum_{e \in \delta(\{v_0\})} x_e = 2K \tag{2}$$

erfüllen. Dabei bezeichnet $\delta(H)$ für eine Knotenteilmenge H alle Kanten von E, von denen genau ein Ende in H liegt:

$$\delta(H) := \{e \in E : |e \cap H| = 1\}.$$

Wir betrachten im Folgenden die *rounded capacity inequalities*

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \left\lceil \frac{\sum_{v \in S} d(v)}{C} \right\rceil \quad \text{für alle } S \subseteq V_0 \text{ mit } S \neq \emptyset$$

und zeigen, dass jede K-Route auch diese Ungleichungen erfüllen muss.

3 Ungleichung

Satz 1
Sei $(G = (V, E), d, c, C, K)$ eine Instanz von CVRP, sei R eine zulässige K-Route und $x \in \{0, 1, 2\}^{|E|}$ der zugehörige Vektor wie oben beschrieben. Dann erfüllt x für jedes $S \subseteq V_0$, $S \neq \emptyset$, die rounded capacity inequality

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \left\lceil \frac{\sum_{v \in S} d(v)}{C} \right\rceil.$$

Beweis. Da $\sum_{v \in S} d(v)$ die Gesamtnachfrage der Knoten in S ist und da die Kapazität eines Fahrzeugs (also die Nachfrage, die durch eine Route befriedigt werden kann) C ist, muss es in einer zulässigen K-Route R wenigstens

$$\frac{\sum_{v \in S} d(v)}{C}$$

Routen geben, die Knoten aus S enthalten. Weil $v_0 \notin S$ ist, muss jede dieser Touren wenigstens zwei Kanten aus $\delta(S)$ enthalten (eine führt in das Gebiet S hinein, die andere wieder hinaus – der Sonderfall, dass es sich dabei um dieselbe Kante handelt, ist eingeschlossen). Also gilt für den zu R gehörigen Vektor x

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \frac{\sum_{v \in S} d(v)}{C}$$

und wegen der Ganzzahligkeit der linken Seite lässt sich die rechte Seite aufrunden. Das zeigt die Behauptung. $\square$

Da es exponentiell viele capacity inequalities gibt, beginnt man üblicherweise mit einem reduzierten Modell, das nur die Bedingungen ohne die capacity inequalities enthält, und fügt nach und nach verletzte capacity inequalities als Schnittebenen hinzu.

4 Beispielbild

Im untenstehenden Graphen sei die Nachfragefunktion definiert durch $d(v_3) = d(v_6) = d(v_8) = d(v_9) = d(v_{10}) = d(v_{11}) = 1$, $d(v_1) = d(v_2) = d(v_4) = d(v_7) = 2$ und $d(v_5) = 4$. Es sei $C = 5$ und $K = 4$. Stellen Sie die capacity inequality für $S = \{v_1, v_2, v_4, v_8, v_9, v_{10}\}$ auf und überzeugen Sie sich davon, dass die eingezeichnete K-Route die Ungleichung erfüllt. Finden Sie eine (ganzzahlige oder fraktionelle) Lösung, die zwar (1) und (2) erfüllt, aber eine capacity inequality verletzt?