Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Kamm-Ungleichungen

1 Problembeschreibung

Problem: Traveling Salesman
Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Distanzfunktion $d : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Aufgabe: Finde eine Tour, die alle Knoten des Graphen G genau einmal besucht und deren Länge bezüglich d möglichst klein ist, oder stelle fest, dass keine solche Tour existiert. Der Begriff „Tour“ wird hier synonym mit „Hamilton-Kreis“ verwendet.

2 Das TSP-Polytop

Definition 1
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP sei $\mathcal{T}(G)$ die Menge aller Touren in G. Für jede Tour $\tau \in \mathcal{T}(G)$ bezeichnen wir mit $x^{(\tau)} \in \{0, 1\}^{|E|}$ den Inzidenzvektor der Kanten, die in der Tour τ verwendet werden. Dann heißt das Polytop

$$P_{TSP}(G) := \operatorname{conv}\left\{x^{(\tau)} : \tau \in \mathcal{T}(G)\right\}$$

das *TSP-Polytop* zum Graphen G. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir auch einfach P_{TSP}. Für eine Kante $e \in E$ bezeichnet $x_e \in \{0, 1\}$ die zur Kante e gehörige Komponente von $x^{(\tau)}$.

3 Ungleichung

Definition 2
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP besteht ein *Kamm* aus einer Knotenmenge $H \subseteq V$ und paarweise disjunkten Knotenteilmengen $T_1, \ldots, T_s \subseteq V$, wobei $s \geq 3$ ungerade, so dass $T_i \cap H \neq \emptyset$ und $T_i \setminus H \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$. Wir nennen H den *Griff* und $T_1, \ldots, T_s$ die *Zähne* des Kamms (vgl. Abbildung beim Beispiel ganz unten).

Die zu einem Kamm gehörige *Kamm-Ungleichung* lautet:

$$\sum_{e \in \delta(H)} x_e + \sum_{i=1}^{s} \sum_{e \in \delta(T_i)} x_e \geq 3s + 1$$

Für eine Knotenteilmenge H bezeichnen wir dabei mit $E(H)$ alle Kanten aus E, deren beide Enden in H liegen, und mit $\delta(H)$ alle Kanten aus E, bei denen genau ein Ende in H liegt:

$$\begin{aligned} E(H) &:= \{e \in E : |e \cap H| = 2\} \\ \delta(H) &:= \{e \in E : |e \cap H| = 1\} \end{aligned}$$

4 Gültigkeit der Ungleichung

Definition 3
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP sei $\mathcal{T}(G)$ die Menge aller TSP-Touren in G. Für jede Tour $\tau \in \mathcal{T}(G)$ bezeichnen wir mit $x_\tau \in \{0,1\}^{|E|}$ den Inzidenzvektor der Kanten, die in der Tour τ verwendet werden. Dann heißt das Polytop

$$\mathcal{P}_{TSP}(G) := \operatorname{conv}\{x_\tau : \tau \in \mathcal{T}(G)\}$$

das *TSP-Polytop* zum Graphen G. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir auch einfach P_{TSP}.

Satz 4
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP sei $s \geq 3$ ungerade, $T_1, \ldots, T_s \subseteq V$ paarweise disjunkte Knotenteilmengen und $H \subseteq V$ so, dass $T_i \cap H \neq \emptyset$ und $T_i \setminus H \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$. Dann ist die Kammungleichung

$$\sum_{e \in \delta(H)} x_e + \sum_{i=1}^{s} \sum_{e \in \delta(T_i)} x_e \geq 3s + 1$$

eine gültige Ungleichung für das TSP-Polytop $P_{TSP}(G)$.

Beweis. Sei x Inzidenzvektor einer TSP-Tour in G. Da die Tour jeden Knoten aus V durchläuft, muss die Tour für jede Teilmenge von V mindestens zwei Kanten enthalten, die mit dieser Knotenmenge genau einen Knoten gemeinsam haben (denn die Tour muss in die Menge hineinführen und sie wieder verlassen). Dies gilt auch für die disjunkten Knotenmengen $T_i \setminus H$ und $T_i \cap H$ für jedes $i \in \{1, \ldots, s\}$. Daraus folgt

$$\sum_{e \in \delta(H) \cap E(T_i)} x_e + \sum_{e \in \delta(T_i)} x_e \geq 3.$$

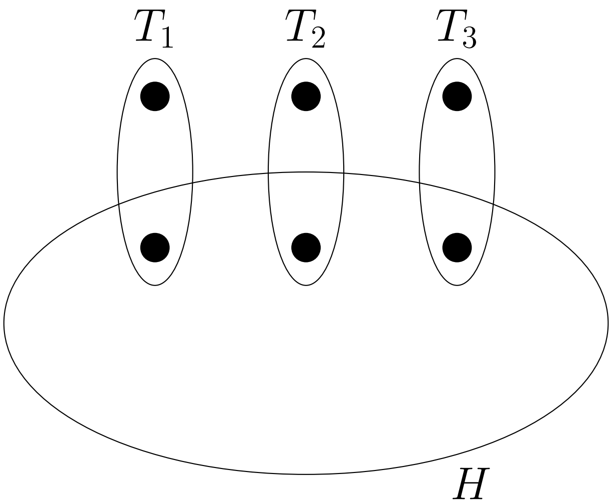
Summiert man diese Ungleichungen über alle $i \in \{1, \ldots, s\}$ auf, so erhält man

$$\sum_{e \in \delta(H)} x_e + \sum_{i=1}^{s} \sum_{e \in \delta(T_i)} x_e \geq 3s.$$

Da die linke Seite gerade ist (warum?) und die rechte Seite ungerade ist (denken Sie daran, dass $|S|$ ungerade war), folgt die Behauptung. $\square$

5 Beispiel

1. Das Beispielbild deutet an, wie die Mengen H und $T_1, \dots, T_s$ eines Kamms zueinander in Beziehung stehen. Ergänzen Sie das Bild zu einem Graphen und zeichnen Sie eine TSP-Tour ein. Überzeugen Sie sich, dass die Tour die Kamm-Ungleichung zum eingezeichneten Kamm erfüllt.



2. Betrachten Sie das unten abgebildete Beispiel $G = K_{12}$ mit der fraktionellen Lösung x, die auf jeder durchgezogenen Kante den Wert 1, auf jeder gestrichelten Kante den Wert $1/2$ und auf jeder nicht eingezeichneten Kante den Wert 0 annimmt. Überzeugen Sie sich davon, dass x die Kamm-Ungleichung zu

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \{1, 11\} \\
T_2 &= \{2, 12\} \\
T_3 &= \{5, 6, 7, 8\} \\
H &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}
\end{aligned}
$$

verletzt.