Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Subtour Elimination Constraints

1 Problembeschreibungen

Problem: Traveling Salesman
Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Distanzfunktion $d : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Aufgabe: Finde eine Tour, die alle Knoten des Graphen G genau einmal besucht und deren Länge bezüglich d möglichst klein ist, oder stelle fest, dass keine solche Tour existiert. Der Begriff „Tour" wird hier synonym mit „Hamilton-Kreis" verwendet.

2 Ungleichung

Definition 1
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP sei $\mathcal{T}(G)$ die Menge aller TSP-Touren in G. Für jede Tour $\tau \in \mathcal{T}(G)$ bezeichnen wir mit $x^{(\tau)} \in \{0,1\}^{|E|}$ den Inzidenzvektor der Kanten, die in der Tour τ verwendet werden. Dann heißt das Polytop

$$P_{TSP}(G) := \operatorname{conv}\left\{x^{(\tau)} : \tau \in \mathcal{T}(G)\right\}$$

das *TSP-Polytop* zum Graphen G. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir auch einfach P_{TSP}. Für eine Kante $e \in E$ bezeichnet $x_e \in \{0,1\}$ die zur Kante e gehörige Komponente von $x^{(\tau)}$.

Die *Subtour Elimination*-Bedingung für eine Knotenteilmenge $S \subseteq V$ mit $\emptyset \neq S \neq V$ lautet:

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \tag{SEC}$$

Für eine Knotenteilmenge S bezeichnen wir dabei mit $E(S)$ alle Kanten aus E, deren beide Enden in S liegen:

$$E(S) := \{e \in E : |e \cap S| = 2\}$$

3 Gültigkeit der Ungleichung

Satz 2
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP und beliebiges $S \subseteq V$ mit $\emptyset \neq S \neq V$ ist die Subtour Elimination-Bedingung zu S eine gültige Ungleichung für das TSP-Polytop $P_{TSP}(G)$.

Beweis. Sei eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP gegeben und sei $S \subseteq V$ mit $\emptyset \neq S \neq V$. Sei weiter $x^{(\tau)} \in \{0, 1\}^{|E|}$ eine Ecke von P_{TSP} und sei $\tau \in \mathcal{T}$ die zugehörige Tour. Angenommen, es gäbe eine Menge $S \subseteq V$ mit $\emptyset \neq S \neq V$, so dass

$$\sum_{e \in E(S)} x_e > |S| - 1,$$

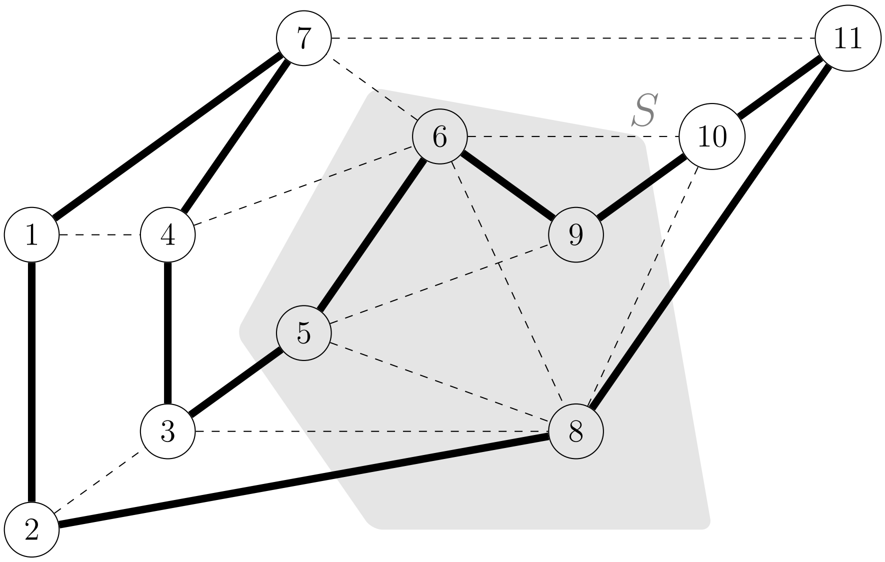
dann enthält die Menge S mindestens $|S|$ Kanten der Tour τ. Man kann leicht zeigen (d. h., *Sie* sollen zeigen!), dass der Subgraph $(S, E(S))$ dann einen Kreis enthält, was wegen $S \neq V$ aber ein Widerspruch ist. Damit gilt die Behauptung auch für das komplette Polytop P_{TSP}. (Warum genügt es dafür, die Aussage für die Ecken zu zeigen?) □

4 Beispiel

- Überzeugen Sie sich, dass die im Beispiel dargestellte Tour die Subtour Elimination Constraints erfüllt.
- Überlegen Sie sich ein Beispiel (d. h. eine Auswahl von Kanten im Graphen), das eine Subtour Elimination-Bedingung verletzt.
- Stellen Sie ein ILP auf, das die Subtour Elimination-Bedingungen zusammen mit weiteren (einfachen) Bedingungen enthält und eine ILP-Formulierung des TSP liefert (die Menge der zulässigen, ganzzahligen Lösungen des ILP soll also der Menge der TSP-Touren in einem gegebene Graphen entsprechen).
- Ist es praktikabel, das TSP-Problem durch Lösen Ihres ILP zu bewältigen? Was für Probleme könnten auftauchen? Schlagen Sie Lösungen vor!
- Zeigen Sie: Mit $\delta(S) := \{e \in E : |e \cap S| = 1\}$ für $S \subseteq V$ ist

  $$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2$$

  eine zu (SEC) äquivalente Ungleichung.


7
11
S
6
10
1
4
9
5
3
8
2