Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Station 1: Facetten des Knapsack-Polytops

Diskutieren Sie folgende Fragen in der Gruppe und tragen Sie Ihre Antworten auf dem Arbeitsblatt ein. Die Aufgaben a)-c) sollten Sie dabei in jedem Fall bearbeiten, die restlichen Aufgaben sind optional.

1 Problembeschreibung

Wir betrachten das *Knapsack-Problem.*

Problem: Knapsack
Input: Eine Kapazität $\beta > 0$, n Objekte mit Werten $c \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$ und Gewichten $w \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$ mit $0 < w_i < \beta$ für alle $i \in N := \{1, \dots, n\}$.

Aufgabe: Bestimme eine Teilmenge $I \subseteq N$ mit $\sum_{i \in I} w_i \leq \beta$, die $\sum_{i \in I} c_i$ maximiert.

Für eine ILP-Formulierung des Knapsack-Problems verwenden wir 0-1-Variablen x_i mit der Bedeutung

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Gegenstand } i \text{ in der Lösung enthalten ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit lässt sich das Knapsack-Problem folgendermaßen als ILP schreiben:

$$\begin{aligned} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq \beta \\ x \in \{0,1\}^n & \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die konvexe Hülle aller zulässigen Lösungen als *Knapsack-Polytop* P_{KNAP}, d. h., $P_{KNAP} := \operatorname{conv}\left\{x \in \{0,1\}^n : w^T x \leq \beta\right\}$. Das Polyeder der LP-Relaxation

$$\begin{aligned} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq \beta \\ x \leq \mathbb{1} & \\ x \geq 0 & \end{aligned}$$

sei entsprechend Q_{KNAP}. Es gilt also $(Q_{KNAP})_I = P_{KNAP}$.

2 Facetten: Grundlagen

Eine für P_{KNAP} gültige Ungleichung $q^T x \leq \gamma$ heißt *facetteninduzierend für* P_{KNAP}, wenn

$$P_{KNAP} \cap \left\{x \in \mathbb{Q}^n : q^T x = \gamma\right\}$$

eine Facette des Knapsack-Polytops ist. Solche Ungleichungen sind also in gewissem Sinne *bestmögliche Schnittebenen* (wenn man alle Facetten kennt, hätte man eine vollständige $\mathcal{H}$-Darstellung des Knapsack-Polytops). Im Folgenden wollen wir eine Klasse von Facetten des Knapsack-Polytops herleiten.

Um die grundlegenden Techniken kennenzulernen, zeigen wir zunächst, dass unter bestimmten Umständen bereits die „trivialen Ungleichungen" $x_i \geq 0$ und $x_i \leq 1$ Facetten von P_{KNAP} induzieren. Dazu gehen wir in mehreren Schritten vor. Zunächst müssen wir die Dimension von P_{KNAP} kennen.

Zur Erinnerung: Die Dimension eines Polytops ist die Dimension seiner affinen Hülle. Um zu zeigen, dass ein Polytop eine bestimmte Dimension besitzt, gibt man meist eine geeignete Anzahl affin unabhängiger Vektoren an, die in dem Polytop enthalten sind (und zeigt ggf., dass es nicht mehr affin unabhängige Vektoren im Polytop geben kann). Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq \mathbb{Q}^n$ ist dabei genau dann affin unabhängig, wenn die $r-1$ „Differenzvektoren" $\{v_2 - v_1, \ldots, v_r - v_1\}$ linear unabhängig sind.

a) Zeigen Sie, dass $\dim(P_{KNAP}) = n$ ist.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $0 < w_i < \beta$ für alle $i \in N$. Demnach liegen alle n Einheitsvektoren u_i mit $i \in N$ in P_{KNAP}. Auch die Lösung, die keinen Gegenstand enthält (der Nullvektor), ist in P_{KNAP}. Damit hätten wir schon $n+1$ affin unabhängige Vektoren in P_{KNAP} gefunden (denn die Vektoren $u_i - 0$ mit $i \in N$ sind linear unabhängig). Daraus folgt, dass $\dim(P_{KNAP}) = n$. □

Um nun zu zeigen, dass eine Schnittebene $q^T x \leq \gamma$ eine Facette des Knapsack-Polytops induziert, ist zu beweisen, dass der Schnitt der Gleichungs-Hyperebene $q^T x = \gamma$ mit P_{KNAP} eine Seite der Dimension $\dim(P_{KNAP}) - 1$ ist. Auch das lässt sich wieder durch Finden einer geeigneten Anzahl affin unabhängiger Vektoren beweisen, die sowohl in P_{KNAP} als auch in der Hyperebene $q^T x = \gamma$ liegen.

3 „Triviale" Facetten

Wir zeigen zunächst beispielhaft

Satz 1
Sei eine Instanz des Knapsack-Problems wie oben gegeben. Dann gilt: Für jedes $j \in N$ induziert die Ungleichung $x_j \geq 0$ eine Facette des Knapsack-Polytops.

Beweis. Sei $j \in N$. Wir definieren die n Vektoren $v_i := u_i$ für $i \in N \setminus \{j\}$ und $v_j := 0$, wobei u_i der i-te Einheitsvektor ist. Die Vektoren sind offenbar affin unabhängig (weil die Vektoren $\{v_i - v_j : i \neq j\}$ linear unabhängig sind). Da sie alle die Ungleichung $x_j \geq 0$ mit Gleichheit erfüllen, liegen sie in der Hyperebene $x_j = 0$. Außerdem gilt nach Voraussetzung, dass $v_i \in P_{KNAP}$ für alle $i \in N$. Damit haben wir n affin unabhängige Vektoren gefunden, die sowohl im Knapsack-Polytop als auch in der fraglichen Hyperebene $x_j = 0$ enthalten sind, also ist $\{x : x_j = 0\} \cap \mathcal{P}_{KNAP}$ eine mindestens $(n-1)$-dimensionale Seite von P_{KNAP}. Da die Seite in einer Hyperebene enthalten ist, kann ihre Dimension natürlich auch nicht größer als $n-1$ sein. Damit ist gezeigt, dass die Ungleichung $x_j \geq 0$ unter der geforderten Voraussetzung eine Facette des Knapsack-Polytops induziert. □

Für die zweite Klasse von Facetten braucht es eine kleine technische Voraussetzung, den Beweis bekommen Sie dann alleine hin.

Satz 2
Sei eine Instanz des Knapsack-Problems mit Bezeichnungen wie oben gegeben, sei $j \in N$ und sei $w^* := \max\{w_i : i \in N \setminus \{j\}\}$. Dann induziert die Ungleichung $x_j \leq 1$ eine Facette von P_{KNAP}, falls $w^* + w_j \leq \beta$ gilt.

b) Beweisen Sie den obigen Satz.

Beweis. Wir definieren die n Vektoren $v_i := u_i + u_j$ für $i \in N \setminus \{j\}$ und $v_j := u_j$, wobei u_i der i-te Einheitsvektor ist. Die Vektoren sind offenbar affin unabhängig (weil die Vektoren $\{v_i - v_j : i \neq j\}$ linear unabhängig sind). Da sie alle die Ungleichung $x_j \leq 1$ mit Gleichheit erfüllen, liegen sie in der Hyperebene $x_j = 1$. Außerdem gilt nach Voraussetzung, dass $v_i \in P_{KNAP}$ für alle $i \in N$, weil der Gegenstand j selbst mit dem schwersten Gegenstand zusammen die Gewichtsbeschränkung erfüllt. Damit haben wir n affin unabhängige Vektoren gefunden, die sowohl im Knapsack-Polytop als auch in der fraglichen Hyperebene $x_j = 1$ enthalten sind, also ist $\{x : x_j = 1\} \cap \mathcal{P}_{KNAP}$ eine mindestens $(n-1)$-dimensionale Seite von P_{KNAP}. Da die Seite in einer Hyperebene enthalten ist, kann ihre Dimension natürlich auch nicht größer als $n-1$ sein. Damit ist gezeigt, dass die Ungleichung $x_j \leq 1$ unter der geforderten Voraussetzung eine Facette des Knapsack-Polytops induziert. $\square$

4 Knapsack Cover Inequalities

Wir betrachten jetzt noch eine etwas interessantere Klasse von Facetten des Knapsack-Polytops. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff des *Covers*.

Definition 3 (Knapsack Cover)
Sei eine Instanz des Knapsack-Problems wie oben gegeben und sei $C \subseteq N$.

i) C heißt *Cover*, falls $\sum_{i \in C} w_i > \beta$ ist.

ii) Ein Cover C heißt *minimales Cover*, falls für jedes $j \in C$ gilt, dass $\sum_{i \in C \setminus \{j\}} w_i \leq \beta$.

iii) Für ein Cover C heißt $E(C) := C \cup \{j \in N \setminus C : w_j \geq \max_{i \in C} w_i\}$ das *Extended Cover* oder die *Erweiterung* zu C.

iv) Die Ungleichung

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1 \tag{C}$$

für ein Cover C bezeichnen wir als *Knapsack Cover Inequality*, die Ungleichung

$$\sum_{i \in E(C)} x_i \leq |C| - 1 \tag{EC}$$

als *Extended Knapsack Cover Inequality*. Die Ungleichung (EC) ist also eine „verstärkte“ Version von Ungleichung (C), in der die linke Seite um weitere nichtnegative Terme „vergrößert“ wurde, während die rechte Seite gleich geblieben ist.

c) Zeigen Sie: Für ein Cover C sind die Ungleichungen (C) und (EC) gültig für das Knapsack-Polytop P_{KNAP}.

Beweis.

- Sei x eine Lösung, die die Ungleichung (C) nicht erfüllt, d. h., die alle Gegenstände aus C enthält. Dann gilt $\sum_{i=1}^n w_i x_i \geq \sum_{i \in C} w_i > \beta$. Daraus folgt, dass $x \notin P_{KNAP}$.
- Sei x eine Lösung, die die Ungleichung (EC) nicht erfüllt, d. h., $\sum_{i \in E(C)} x_i \geq |C|$. Wir definieren $R := \{i : x_i = 1\}$. Dann gilt also: $|E(C) \cap R| \geq |C|$. Daraus folgt $\sum_{i=1}^n w_i x_i = \sum_{i \in R} w_i \geq \sum_{i \in E(C) \cap R} w_i \geq \sum_{i \in C} w_i > \beta$. Die 2. Abschätzung kommt daher, dass $|E(C) \cap R| \geq |C|$ und dass $\min\{w_i : i \in E(C) \setminus C\} \geq \max\{w_i : i \in C\}$. Es gilt also, dass $x \notin P_{KNAP}$. □

Damit eine Ungleichung eine Facette des Polytops induzieren kann, darf es keine gültige Ungleichung geben, von der sie dominiert wird.

Definition 4
Sei $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$ ein Polyeder und $d^T x \leq \delta$ sowie $(d')^T x \leq \delta'$ zwei für P gültige Ungleichungen mit $d, d' \in \mathbb{R}_+^n$ und $\delta, \delta' \geq 0$. Dann heißt die Ungleichung $(d')^T x \leq \delta'$ *dominant über* die Ungleichung $d^T x \leq \delta$, wenn es ein $\mu > 0$ gibt, so dass $(\mu d, \mu\delta) \neq (d', \delta')$ und

1. $d' \geq \mu d$
2. $\delta' \leq \mu\delta$

gilt.

Wird eine Ungleichung von einer anderen dominiert, so bedeutet dies also, dass die beiden Ungleichungen (evtl. nach geeigneter Skalierung mit einem Parameter μ) miteinander vergleichbar sind und dass die dominante Ungleichung „strenger“ ist. Das kann entweder daran liegen, dass die linke Seite höhere Koeffizienten enthält (das passiert z. B. beim Übergang vom Knapsack Cover auf ein Extended Cover), oder auch daran, dass die rechte Seite kleiner wird. Natürlich sind auch Kombinationen der beiden Effekte möglich. Geometrisch bedeutet das, dass die zur dominierten Ungleichung gehörende Hyperebene so gedreht und/oder „nach innen“ verschoben werden kann, dass sie weiterhin für P gültig bleibt – für eine Facette wäre das aber nicht möglich.

Offenbar ist eine Extended Cover Inequality immer dominant über die zugehörige Cover Inequality (warum?), für Facetten betrachten wir also nur Extended Cover Inequalities. Wir zeigen jetzt, dass die Extended Knapsack Cover Inequalities unter bestimmten Voraussetzungen Facetten von P_{KNAP} induzieren. Dazu betrachten wir exemplarisch zwei Spezialfälle (eine allgemeinere Aussage ist möglich, aber der Beweis ist etwas technisch, Details s. [Bal75]). Ausgangspunkt ist ein minimales Cover C und dessen Erweiterung $E(C)$.

Satz 5
Sei eine Instanz des Knapsack-Problems gegeben mit $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$. Für ein minimales Cover $C = \{j_1, \ldots, j_r\}$ mit $w_{j_1} \geq w_{j_2} \geq \cdots \geq w_{j_r}$ gilt dann:v

i) Ist $C = N$, so induziert die Cover Inequality zu C eine Facette von P_{KNAP}.

ii) Ist $E(C) = N$ und $(\sum_{i \in C \setminus \{j_1, j_2\}} w_i) + w_1 \leq \beta$, so induziert die Extended Cover Inequality zu C eine Facette von P_{KNAP}.

Für den Beweis sind die folgenden Mengen hilfreich:

$$R_k := C \setminus \{k\} \quad \text{für alle } k \in C,$$
$$S_k := C \setminus \{j_1, j_2\} \cup \{k\} \quad \text{für alle } k \in E(C) \setminus C.$$

d) Beweisen Sie die erste Aussage des Satzes. Dazu können Sie die Mengen R_k verwenden.

Beweis. Es gilt $C = N$. Für $k \in C$ definieren wir den Vektor v_k als

$$(v_k)_i := \begin{cases} 1, & i \in R_k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Vektoren v_k mit $k \in C = N$ sind n affin unabhängige Vektoren, die die Cover Inequality zu C mit Gleichheit erfüllen. Außerdem liegen alle v_k in P_{KNAP}, da C nach Voraussetzung ein minimales Cover ist und somit gilt, dass $\sum_{i \in C \setminus \{k\}} w_i \leq \beta$ für alle $k \in C$. Es folgt, dass $P_{KNAP} \cap \{x \in \{0,1\}^n : x \text{ erfüllt } (C) \text{ zu } C\}$ eine Facette von P_{KNAP} ist. □

---

e) Beweisen Sie die zweite Aussage des Satzes mit Hilfe der Mengen R_k und S_k.

Beweis. Es gilt $E(C) = N$ und $(\sum_{i \in C \setminus \{j_1, j_2\}} w_i) + w_1 \leq \beta$. Wir definieren n Vektoren folgendermaßen: Für $k \in C$ sei v_k gegeben durch

$$(v_k)_i := \begin{cases} 1, & i \in R_k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da C nach Voraussetzung ein minimales Cover ist, liegen diese Vektoren in P_{KNAP}. Für $k \in E(C) \setminus C$ definieren wir v_k als

$$(v_k)_i := \begin{cases} 1, & i \in S_k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da nach Voraussetzung gilt, dass $(\sum_{i \in C \setminus \{j_1, j_2\}} w_i) + w_1 \leq \beta$, wobei $w_1 = \max\{w_i : i \in N\}$, gilt auch, dass $(\sum_{i \in C \setminus \{j_1, j_2\}} w_i) + w_k \leq \beta$ für jedes $k \in E(C) \setminus C$, weshalb die oben definierten Vektoren in P_{KNAP} liegen. Damit haben wir n affin unabhängige Vektoren aus P_{KNAP}, die alle die Extended Cover Inequality zu C mit Gleichheit erfüllen. Es folgt, dass $P_{KNAP} \cap \{x \in \{0,1\}^n : x \text{ erfüllt } (EC) \text{ zu } C\}$ eine Facette von P_{KNAP} ist. □

Referenzen

[Bal75] Egon Balas. „Facets of the Knapsack Polytope“. In: *Mathematical Programming* 8, 1975, S. 146–164.