Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Station 3: Das Matching-Polytop

Diskutieren Sie folgende Fragen in der Gruppe und tragen Sie Ihre Antworten auf dem Arbeitsblatt ein. Aufgaben a) – d) sind Pflichtaufgaben, alle anderen sind optional (wenn Sie noch Zeit haben).

1 Problembeschreibung

Problem: Matching
Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Profitfunktion $c : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Aufgabe: Finde ein Matching in G, dessen gesamter Profit möglichst groß ist. Ein Matching ist eine Kanten-Teilmenge $M \subseteq E$, so dass jeder Knoten in V mit maximal einer Kante in M inzident ist. Der Profit eines Matchings M ist $\sum_{e \in M} c_e$.

Matchingprobleme spielen immer dann eine Rolle, wenn Zuordnungen modelliert werden müssen. Dabei kann es sich etwa um Zuordnungen von Arbeitern zu Jobs handeln, wobei die Profitfunktion dann beschreibt, wie gut ein Arbeiter für einen Job qualifiziert ist. Es kann sich aber auch um Paarbildungen innerhalb einer Gruppe handeln, etwa wenn in einer Vorlesung Zweiergruppen gebildet werden sollen. Die Profitfunktion könnte dann z. B. modellieren, wie gut zwei Personen zusammenarbeiten würden (und wenn sie sich auf den Tod nicht ausstehen können, enthielte der Graph eben keine Kante zwischen den beiden).

2 Das Matching-Polytop

Für eine gegebene Instanz des Matching-Problems bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge aller Matchings im Graphen G. Zu jedem Matching M sei ein *charakteristischer Vektor* $x^{(M)} \in \{0,1\}^{|E|}$ definiert durch

$$x_e^{(M)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } e \in M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das *Matching-Polytop* $P_{\mathcal{M}}$ für die Instanz ist dann die konvexe Hülle der charakteristischen Vektoren aller Matchings:

$$P_{\mathcal{M}} := \operatorname{conv}\left\{ x^{(M)} : M \text{ ist ein Matching in } G \right\}.$$

3 Odd Set Inequalities

Wir bezeichnen mit $\mathcal{O} := \{U \subseteq V : |U| \equiv 1 \mod 2\}$ die Menge aller ungeraden Teilmengen der Knotenmenge („odd node sets“). Für beliebiges $U \subseteq V$ sei $E(U) := \{e \in E : e \subseteq U\}$ die

Menge aller Kanten, die vollständig in U liegen. Für ein $U \in \mathcal{O}$ bezeichnet man die Ungleichung

$$\sum_{e \in E(U)} x_e \leq \frac{|U| - 1}{2} \tag{OS}$$

als *odd set inequality* zur Menge U.

a) Begründen Sie anschaulich, warum die odd set inequality für jede Menge $U \in \mathcal{O}$ eine gültige Ungleichung für $P_{\mathcal{M}}$ ist.

Beweis. In jeder Knotenteilmenge $U \subseteq V$ können höchstens $\frac{|U|}{2}$ Matchingkanten liegen, die nur Knoten aus U enthalten (sonst müsste mindestens einer der Knoten zu mehr als einer Matchingkante inzident sein). Deshalb gilt für alle Teilmenge $U \subseteq V$

$$\sum_{e \in E(U)} x_e \leq \frac{|U|}{2},$$

und da die linke Seite für alle zulässigen $x \in P_{\mathcal{M}}$ ganzzahlig ist, folgt

$$\sum_{e \in E(U)} x_e \leq \left\lfloor \frac{|U|}{2} \right\rfloor,$$

was für ungerade U der odd set inequality entspricht. $\square$

---

4 Facetten des Matching-Polytops

Eine für $P_{\mathcal{M}}$ gültige Ungleichung $q^T x \leq \gamma$ heißt *facetteninduzierend für* $P_{\mathcal{M}}$, wenn

$$P_{\mathcal{M}} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^m : q^T x = \gamma \right\}$$

eine Facette des Matching-Polytops ist. Solche Ungleichungen sind also in gewissem Sinne *bestmögliche Schnittebenen*. Kennt man alle Facetten von $P_{\mathcal{M}}$, so hat man eine vollständige $\mathcal{H}$-Darstellung des Matching-Polytops. Wir zeigen im Folgenden, dass die odd set inequalities unter bestimmten Voraussetzungen Facetten von $P_{\mathcal{M}}$ induzieren. Dazu benötigen wir zunächst die Dimension von $P_{\mathcal{M}}$.

Zur Erinnerung: Die Dimension eines Polytops ist die Dimension seiner affinen Hülle. Um zu zeigen, dass ein Polytop eine bestimmte Dimension besitzt, gibt man meist eine geeignete Anzahl affin unabhängiger Vektoren an, die in dem Polytop enthalten sind (und zeigt ggf., dass es nicht mehr affin unabhängige Vektoren im Polytop geben kann). Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist dabei genau dann affin unabhängig, wenn die $r - 1$ „Differenzvektoren" $\{v_2 - v_1, \dots, v_r - v_1\}$ linear unabhängig sind.

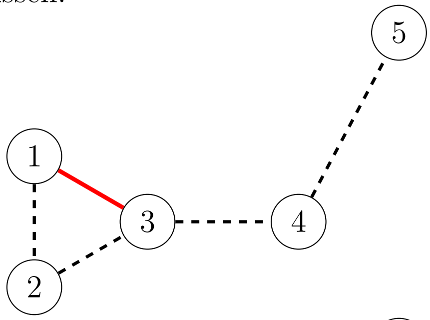
b) Zeigen Sie, dass das Matching-Polytop volldimensional ist, d. h., dass $\dim(P_{\mathcal{M}}) = m$ gilt.

Beweis. Wir bezeichnen mit $m := |E|$ die Anzahl aller Kanten im Graphen. Da jede einzelne Kante für sich genommen ein Matching ist, liegen alle Einheitsvektoren u_i mit $i \in \{1, \ldots, m\}$ in $P_{\mathcal{M}}$. Zusammen mit dem Nullvektor (eine leere Kantenmenge ist auch ein Matching) haben wir so $m+1$ affin unabhängige Vektoren in $P_{\mathcal{M}}$ gefunden, woraus folgt, dass $\dim(P_{\mathcal{M}}) = m$.□

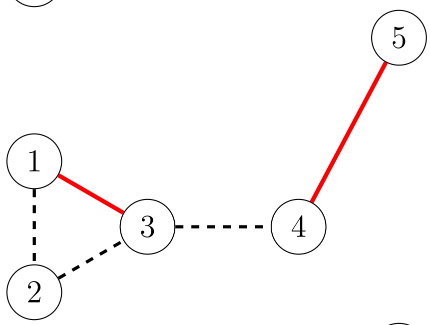
Um nun zu zeigen, dass eine Schnittebene $q^T x \leq \gamma$ eine Facette des Matching-Polytops induziert, ist zu beweisen, dass der Schnitt der Gleichungs-Hyperebene $q^T x = \gamma$ mit $P_{\mathcal{M}}$ eine Seite der Dimension $\dim(P_{\mathcal{M}}) - 1$ ist. Auch das lässt sich wieder durch Finden einer geeigneten Anzahl affin unabhängiger Vektoren beweisen, die sowohl in $P_{\mathcal{M}}$ als auch in der Hyperebene $q^T x = \gamma$ liegen.

Wir zeigen beispielhaft, dass die odd set inequality für $U \in \mathcal{O}$ mit $|U| = 3$ eine Facette des Matching-Polytops induziert, falls der Subgraph $(U, E(U))$ ein Kreis ist.

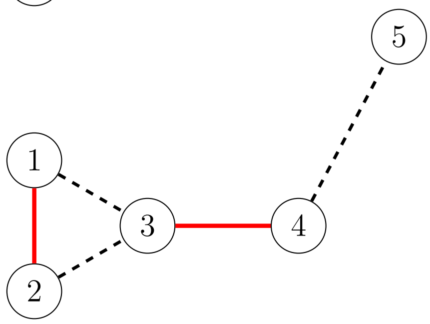
Beweis. Sei $U \in \mathcal{O}$ mit $|U| = 3$, so dass $(U, E(U))$ ein Kreis ist. Es ist zu zeigen, dass $\sum_{e \in E(U)} x_e = {}^1\!/\!_2(|U| - 1) = 1$ eine Facette von $P_{\mathcal{M}}$ induziert. Dazu müssen wir beweisen, dass es m affin unabhängige Vektoren gibt, die diese Gleichung erfüllen und in $P_{\mathcal{M}}$ liegen. Wir konstruieren diese Vektoren als Inzidenzvektoren der folgenden Matchings, bei denen wir (um die Gleichung zu erfüllen) immer genau eine Kante aus $E(U)$ als Matchingkante nehmen müssen:



Fall 1: Wähle genau eine Kante in $E(U)$ als Matchingkante aus, alle anderen Kanten sind Nichtmatchingkanten. Damit ist die Gleichung erfüllt.



Fall 2: Genau eine Kante in $E(U)$ wird für das Matching gewählt, zusätzlich wird eine Kante gewählt, die keinen Knoten mit U gemeinsam hat.



Fall 3: Genau eine Kante außerhalb von $E(U)$ wird gewählt, deren eines Ende aber in U liegt. In $E(U)$ gibt es dann genau eine Kante, die nicht mit u inzident ist, diese wird ebenfalls für das Matching gewählt.

Die Inzidenzvektoren, die zu den skizzierten Matchings gehören, sind offenbar linear und folglich affin unabhängig (beachte die Position der 1-Einträge). Damit haben wir wie gewünscht m affin unabhängige Vektoren, die die gewünschte Gleichung erfüllen. Das zeigt die Behauptung. $\square$

5 Dominierende Ungleichungen

Der Facetten-Beweis, den wir oben für den Fall $|U| = 3$ geführt haben, lässt sich ohne große Schwierigkeiten verallgemeinern. Um das Prinzip nachzuvollziehen, betrachten wir noch die nächste „Stufe“:

c) Zeigen Sie: Die odd set inequality für $U \in \mathcal{O}$ mit $|U| = 5$ induziert eine Facette des Matching-Polytops, falls der Subgraph $(U, E(U))$ ein Kreis ist.

Beweis. Wenn $|U| = 5$, nimmt die odd set inequality die folgende Form an:

$$\sum_{e \in E(U)} x_e \leq 2.$$

Wir bezeichnen die Kanten in $E(U)$ als $e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, e_{j_4}, e_{j_5}$, so dass $(e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, e_{j_4}, e_{j_5})$ einen Kreis bildet. Analog zu dem Fall, dass $|U| = 3$, unterscheiden wir drei Fälle:

1. Fall: Wähle jeweils zwei Kanten in $E(U)$ als Matchingkanten aus, die nicht inzident sind. Alle anderen Kanten sind Nichtmatchingkanten. Das ergibt die fünf Matchings $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$, $\{e_3, e_5\}$, $\{e_4, e_1\}$ und $\{e_5, e_2\}$. Für all diese Matchings ist die Gleichung erfüllt.
2. Fall: Zwei miteinander nicht inzidente Kanten in $E(U)$ werden für das Matching gewählt, zusätzlich wird eine Kante gewählt, die keinen Knoten mit U gemeinsam hat.
3. Fall: Genau eine Kante e außerhalb von $E(U)$ wird gewählt, deren eines Ende in U liegt. In $E(U)$ gibt es dann genau zwei Kanten, die nicht mit e und auch nicht miteinander inzident sind. Diese werden ebenfalls für das Matching gewählt.

Jeder der $m - 5$ Kanten außerhalb von $E(U)$ „entspricht“ also eins der obigen Matchings und zusätzlich haben wir 5 Matchings, die nur Kanten aus $E(U)$ enthalten. Das ergibt insgesamt m affin unabhängige Inzidenzvektoren in $P_{\mathcal{M}}$, die alle die gewünschte Gleichung erfüllen. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Für größere U-Mengen geht es analog, nur der Beweis der Unabhängigkeit der nötigen Vektoren ist für den allgemeinen Fall etwas komplizierter aufzuschreiben.

Wenn der Subgraph $(U, E(U))$ ein Kreis ist, induziert die Ungleichung zu den Kanten in diesem Kreis also eine Facette des Matching-Polytops. Nun stellt sich die Frage, ob sie dies auch noch tut, wenn wir lediglich fordern, dass der Subgraph $(U, E(U))$ einen Kreis der Länge $|U|$ *enthält*, wenn er also noch weitere Kanten (sogenannte „chords“ oder „Kreissehnen“) enthalten kann. Funktioniert der Beweis dann weiterhin? Der Kreis an sich ist ja nach wie vor vorhanden und die *Kreisungleichung* ist immer noch gültig für das Polytop. Wir werden das Problem an einem Beispiel untersuchen.

Damit eine Ungleichung eine Facette des Polytops induzieren kann, darf es keine für das Polytop gültige Ungleichung geben, von der sie *dominiert* wird.

Definition 1
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$ ein Polyeder und $d^T x \leq \delta$ sowie $(d')^T x \leq \delta'$ zwei für P gültige Ungleichungen mit $d, d' \in \mathbb{R}^n_+$ und $\delta, \delta' \geq 0$. Dann heißt die Ungleichung $(d')^T x \leq \delta'$ *dominant über* die Ungleichung $d^T x \leq \delta$, wenn es ein $\mu > 0$ gibt, so dass $(\mu d, \mu\delta) \neq (d', \delta')$ und

1. $d' \geq \mu d$
2. $\delta' \leq \mu\delta$

gilt.

Wird eine Ungleichung von einer anderen dominiert, so bedeutet dies also, dass die beiden Ungleichungen (evtl. nach geeigneter Skalierung mit einem Parameter μ) miteinander vergleichbar sind und dass die dominante Ungleichung „strenger“ ist. Das kann entweder daran liegen, dass die linke Seite höhere Koeffizienten enthält (das passiert z. B. beim Übergang vom Knapsack Cover auf ein Extended Cover), oder auch daran, dass die rechte Seite kleiner wird. Natürlich sind auch Kombinationen der beiden Effekte möglich. Geometrisch bedeutet das, dass die zur dominierten Ungleichung gehörende Hyperebene so gedreht und/oder „nach innen“ verschoben werden kann, dass sie weiterhin für P gültig bleibt – für eine Facette wäre das aber nicht möglich.

d) Zeigen Sie: Wird eine für das Matching-Polytop gültige Ungleichung von einer anderen gültigen Ungleichung dominiert, so kann sie keine Facette des Polytops induzieren.

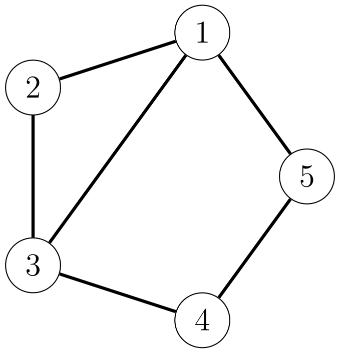
Beweis. Seien $p, q \in \mathbb{R}^m_+$ und $\pi, \chi \in \mathbb{R}_+$ so, dass

$$p^T x \leq \pi \tag{1}$$
$$\text{und} \quad q^T x \leq \chi \tag{2}$$

gültige Ungleichungen für $P_\mathcal{M}$ sind. Sei weiter (2) dominant über (1).

Angenommen, (1) induziere eine Facette des Matching-Polytops, diese Facette sei $F := P^= \cap P_\mathcal{M}$. Dann gibt es m affin unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in F$, für die $p^T v_i = \pi$ $(i = 1, \ldots, m)$ gilt. Wegen Dominanz gibt es ein $\mu > 0$ mit $q \geq \mu p$ und $\chi \leq \mu\pi$, wir nehmen o.B.d.A. $\mu = 1$ an. Damit gilt für alle $x \in F$ die Ungleichung $q^T x \geq p^T x = \pi \geq \chi$. Da außerdem $q^T x \leq \chi$ eine für $P_\mathcal{M}$ gültige Ungleichung ist, folgt $q^T v_i = \chi$ für alle $i = 1, \ldots m$. Die Hyperebene $\left\{x \in \mathbb{R}^m : q^T x = \chi\right\}$ wird aber durch m affin unabhängige Vektoren eindeutig bestimmt, also ist $\left\{x \in \mathbb{R}^m : q^T x = \chi\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^m : p^T x = \pi\right\}$ und damit gibt es ein $\lambda > 0$ mit $(p, \pi) = \lambda(q, \chi)$, im Widerspruch zur Dominanz. $\square$

Wir betrachten als Beispiel den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:



Sei $C := \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\}\}$ die Kantenmenge des großen Kreises. Wir zeigen nun, dass die Ungleichung

$$\sum_{e\in C} x_e = x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{51} \leq 2, \tag{K}$$

die der odd set inequality für einen Kreis der Länge 5 entspricht, keine Facette des Matching-Polytops induziert.

e) Zeigen Sie zunächst, dass die Ungleichung $\sum_{e\in C} x_e = x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{51} \leq 2$ gültig für das Matching-Polytop ist.

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis bei Aufgabe a). Da $|U| = 5$, können zwischen den Knoten aus U höchstens $\left\lfloor \frac{|U|}{2} \right\rfloor = 2$ Matchingkanten verlaufen, weil sonst ein Knoten aus U mit mindestens zwei Matchingkanten inzident sein müsste. ☐

---

f) Betrachten Sie analog die „Kreisungleichungen“ für die beiden kleineren Kreise in obigem Graphen. Durch Kombination der drei „Kreisungleichungen“ erhalten Sie eine weitere gültige Ungleichung. Leiten Sie daraus eine gültige Ungleichung ab, die (K) dominiert, und zeigen Sie so, dass (K) keine Facette des Matching-Polytops induziert.

Beweis. Die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{23} + x_{31} &\leq 1 \\ x_{13} + x_{34} + x_{45} + x_{51} &\leq 2 \\ \sum_{e\in E_U} x_e = x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{51} &\leq 2 \end{aligned}$$

sind alle gültige Ungleichungen für das Matchingpolytop. Durch Addition erhält man daraus die ebenfalls gültige Ungleichung

$$2(x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{51} + x_{13}) \leq 5.$$

Weil die Ecken des Matchingpolytops $\mathcal{M}(G)$ ganzzahlig sind, kann man diese Ungleichung zu

$$x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{51} + x_{13} \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$$

verschärfen, also ist (etwas anders geschrieben)

$$\sum_{e \in C} x_e + x_{13} \leq 2 \qquad \square$$

ebenfalls eine gültige Ungleichung für $\mathcal{M}(G)$ – nämlich gerade die odd set inequality, in die die gesamte Kantenmenge $E(U)$ eingeht! Diese Ungleichung dominiert aber die Ungleichung $\sum_{e \in C} x_e \leq 2$ (d. h., jeder für die obere Ungleichung zulässige Punkt ist auch für die untere Ungleichung (K) zulässig, umgekehrt gibt es aber Punkte, die zwar für (K), nicht aber für die obere Ungleichung zulässig sind). Also kann Ungleichung (K) keine Facette sein.

Dass die zur gesamten Kantenmenge $E(U)$ gehörige odd set inequality gültig ist, hatten wir an sich schon in Aufgabe a) gezeigt. Die Konstruktion dieser Ungleichung aus anderen gültigen Ungleichungen, wie wir es in dieser Aufgabe gemacht haben, war insofern etwas umständlich, aber natürlich genauso zulässig.
