Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis

Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Station 3: Das Matching-Polytop

Diskutieren Sie folgende Fragen in der Gruppe und tragen Sie Ihre Antworten auf dem Arbeitsblatt ein. Aufgaben a) – d) sind Pflichtaufgaben, alle anderen sind optional (wenn Sie noch Zeit haben).

1 Problembeschreibung

Problem: Matching
Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Profitfunktion $c : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Aufgabe: Finde ein Matching in G, dessen gesamter Profit möglichst groß ist. Ein Matching ist eine Kanten-Teilmenge $M \subseteq E$, so dass jeder Knoten in V mit maximal einer Kante in M inzident ist. Der Profit eines Matchings M ist $\sum_{e \in M} c_e$.

Matchingprobleme spielen immer dann eine Rolle, wenn Zuordnungen modelliert werden müssen. Dabei kann es sich etwa um Zuordnungen von Arbeitern zu Jobs handeln, wobei die Profitfunktion dann beschreibt, wie gut ein Arbeiter für einen Job qualifiziert ist. Es kann sich aber auch um Paarbildungen innerhalb einer Gruppe handeln, etwa wenn in einer Vorlesung Zweiergruppen gebildet werden sollen. Die Profitfunktion könnte dann z. B. modellieren, wie gut zwei Personen zusammenarbeiten würden (und wenn sie sich auf den Tod nicht ausstehen können, enthielte der Graph eben keine Kante zwischen den beiden).

2 Das Matching-Polytop

Für eine gegebene Instanz des Matching-Problems bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge aller Matchings im Graphen G. Zu jedem Matching M sei ein *charakteristischer Vektor* $x^{(M)} \in \{0,1\}^{|E|}$ definiert durch

$$x_e^{(M)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } e \in M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das *Matching-Polytop* $P_{\mathcal{M}}$ für die Instanz ist dann die konvexe Hülle der charakteristischen Vektoren aller Matchings:

$$P_{\mathcal{M}} := \operatorname{conv}\left\{ x^{(M)} : M \text{ ist ein Matching in } G \right\}.$$

3 Odd Set Inequalities

Wir bezeichnen mit $\mathcal{O} := \{U \subseteq V : |U| \equiv 1 \mod 2\}$ die Menge aller ungeraden Teilmengen der Knotenmenge („odd node sets“). Für beliebiges $U \subseteq V$ sei $E(U) := \{e \in E : e \subseteq U\}$ die

Menge aller Kanten, die vollständig in U liegen. Für ein $U \in \mathcal{O}$ bezeichnet man die Ungleichung

$$\sum_{e \in E(U)} x_e \leq \frac{|U| - 1}{2} \tag{OS}$$

als *odd set inequality* zur Menge U.

a) Begründen Sie anschaulich, warum die odd set inequality für jede Menge $U \in \mathcal{O}$ eine gültige Ungleichung für $P_{\mathcal{M}}$ ist.

4 Facetten des Matching-Polytops

Eine für $P_{\mathcal{M}}$ gültige Ungleichung $q^T x \leq \gamma$ heißt *facetteninduzierend für* $P_{\mathcal{M}}$, wenn

$$P_{\mathcal{M}} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^m : q^T x = \gamma \right\}$$

eine Facette des Matching-Polytops ist. Solche Ungleichungen sind also in gewissem Sinne *bestmögliche Schnittebenen*. Kennt man alle Facetten von $P_{\mathcal{M}}$, so hat man eine vollständige $\mathcal{H}$-Darstellung des Matching-Polytops. Wir zeigen im Folgenden, dass die odd set inequalities unter bestimmten Voraussetzungen Facetten von $P_{\mathcal{M}}$ induzieren. Dazu benötigen wir zunächst die Dimension von $P_{\mathcal{M}}$.

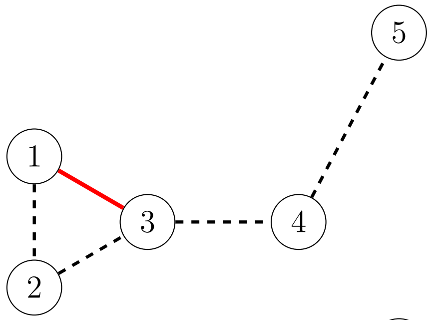
Zur Erinnerung: Die Dimension eines Polytops ist die Dimension seiner affinen Hülle. Um zu zeigen, dass ein Polytop eine bestimmte Dimension besitzt, gibt man meist eine geeignete Anzahl affin unabhängiger Vektoren an, die in dem Polytop enthalten sind (und zeigt ggf., dass es nicht mehr affin unabhängige Vektoren im Polytop geben kann). Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist dabei genau dann affin unabhängig, wenn die $r - 1$ „Differenzvektoren" $\{v_2 - v_1, \ldots, v_r - v_1\}$ linear unabhängig sind.

b) Zeigen Sie, dass das Matching-Polytop volldimensional ist, d. h., dass $\dim(P_{\mathcal{M}}) = m$ gilt.

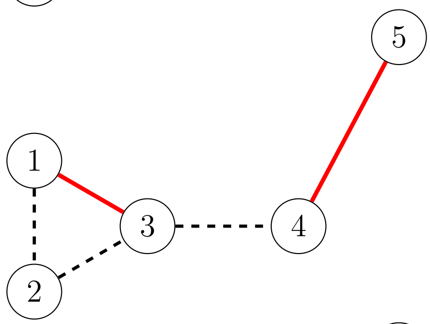
Um nun zu zeigen, dass eine Schnittebene $q^T x \leq \gamma$ eine Facette des Matching-Polytops induziert, ist zu beweisen, dass der Schnitt der Gleichungs-Hyperebene $q^T x = \gamma$ mit $P_{\mathcal{M}}$ eine Seite der Dimension $\dim(P_{\mathcal{M}}) - 1$ ist. Auch das lässt sich wieder durch Finden einer geeigneten Anzahl affin unabhängiger Vektoren beweisen, die sowohl in $P_{\mathcal{M}}$ als auch in der Hyperebene $q^T x = \gamma$ liegen.

Wir zeigen beispielhaft, dass die odd set inequality für $U \in \mathcal{O}$ mit $|U| = 3$ eine Facette des Matching-Polytops induziert, falls der Subgraph $(U, E(U))$ ein Kreis ist.

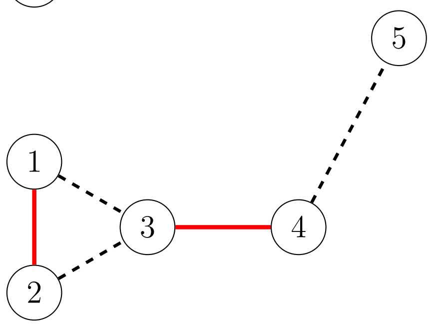
Beweis. Sei $U \in \mathcal{O}$ mit $|U| = 3$, so dass $(U, E(U))$ ein Kreis ist. Es ist zu zeigen, dass $\sum_{e \in E(U)} x_e = 1/2(|U| - 1) = 1$ eine Facette von $P_{\mathcal{M}}$ induziert. Dazu müssen wir beweisen, dass es m affin unabhängige Vektoren gibt, die diese Gleichung erfüllen und in $P_{\mathcal{M}}$ liegen. Wir konstruieren diese Vektoren als Inzidenzvektoren der folgenden Matchings, bei denen wir (um die Gleichung zu erfüllen) immer genau eine Kante aus $E(U)$ als Matchingkante nehmen müssen:



Fall 1: Wähle genau eine Kante in $E(U)$ als Matchingkante aus, alle anderen Kanten sind Nichtmatchingkanten. Damit ist die Gleichung erfüllt.



Fall 2: Genau eine Kante in $E(U)$ wird für das Matching gewählt, zusätzlich wird eine Kante gewählt, die keinen Knoten mit U gemeinsam hat.



Fall 3: Genau eine Kante außerhalb von $E(U)$ wird gewählt, deren eines Ende aber in U liegt. In $E(U)$ gibt es dann genau eine Kante, die nicht mit u inzident ist, diese wird ebenfalls für das Matching gewählt.

Die Inzidenzvektoren, die zu den skizzierten Matchings gehören, sind offenbar linear und folglich affin unabhängig (beachte die Position der 1-Einträge). Damit haben wir wie gewünscht m affin unabhängige Vektoren, die die gewünschte Gleichung erfüllen. Das zeigt die Behauptung. □

5 Dominierende Ungleichungen

Der Facetten-Beweis, den wir oben für den Fall $|U| = 3$ geführt haben, lässt sich ohne große Schwierigkeiten verallgemeinern. Um das Prinzip nachzuvollziehen, betrachten wir noch die nächste „Stufe“:

c) Zeigen Sie: Die odd set inequality für $U \in \mathcal{O}$ mit $|U| = 5$ induziert eine Facette des Matching-Polytops, falls der Subgraph $(U, E(U))$ ein Kreis ist.

Für größere U-Mengen geht es analog, nur der Beweis der Unabhängigkeit der nötigen Vektoren ist für den allgemeinen Fall etwas komplizierter aufzuschreiben.

Wenn der Subgraph $(U, E(U))$ ein Kreis ist, induziert die Ungleichung zu den Kanten in diesem Kreis also eine Facette des Matching-Polytops. Nun stellt sich die Frage, ob sie dies auch noch tut, wenn wir lediglich fordern, dass der Subgraph $(U, E(U))$ einen Kreis der Länge $|U|$ *enthält*, wenn er also noch weitere Kanten (sogenannte „chords“ oder „Kreissehnen“) enthalten kann. Funktioniert der Beweis dann weiterhin? Der Kreis an sich ist ja nach wie vor vorhanden und die *Kreisungleichung* ist immer noch gültig für das Polytop. Wir werden das Problem an einem Beispiel untersuchen.

Damit eine Ungleichung eine Facette des Polytops induzieren kann, darf es keine für das Polytop gültige Ungleichung geben, von der sie *dominiert* wird.

Definition 1
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$ ein Polyeder und $d^T x \leq \delta$ sowie $(d')^T x \leq \delta'$ zwei für P gültige Ungleichungen mit $d, d' \in \mathbb{R}^n_+$ und $\delta, \delta' \geq 0$. Dann heißt die Ungleichung $(d')^T x \leq \delta'$ *dominant über* die Ungleichung $d^T x \leq \delta$, wenn es ein $\mu > 0$ gibt, so dass $(\mu d, \mu\delta) \neq (d', \delta')$ und

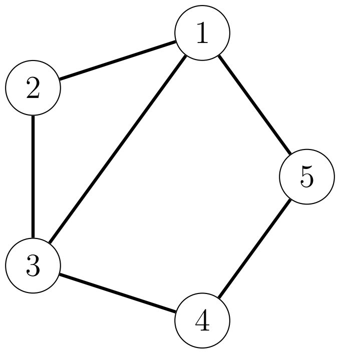
1. $d' \geq \mu d$
2. $\delta' \leq \mu\delta$

gilt.

Wird eine Ungleichung von einer anderen dominiert, so bedeutet dies also, dass die beiden Ungleichungen (evtl. nach geeigneter Skalierung mit einem Parameter μ) miteinander vergleichbar sind und dass die dominante Ungleichung „strenger" ist. Das kann entweder daran liegen, dass die linke Seite höhere Koeffizienten enthält (das passiert z. B. beim Übergang vom Knapsack Cover auf ein Extended Cover), oder auch daran, dass die rechte Seite kleiner wird. Natürlich sind auch Kombinationen der beiden Effekte möglich. Geometrisch bedeutet das, dass die zur dominierten Ungleichung gehörende Hyperebene so gedreht und/oder „nach innen" verschoben werden kann, dass sie weiterhin für P gültig bleibt – für eine Facette wäre das aber nicht möglich.

d) Zeigen Sie: Wird eine für das Matching-Polytop gültige Ungleichung von einer anderen gültigen Ungleichung dominiert, so kann sie keine Facette des Polytops induzieren.

Wir betrachten als Beispiel den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:



Sei $C := \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,1\}\}$ die Kantenmenge des großen Kreises. Wir zeigen nun, dass die Ungleichung

$$\sum_{e \in C} x_e = x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{51} \leq 2, \tag{K}$$

die der odd set inequality für einen Kreis der Länge 5 entspricht, keine Facette des Matching-Polytops induziert.

e) Zeigen Sie zunächst, dass die Ungleichung $\sum_{e \in C} x_e = x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{51} \leq 2$ gültig für das Matching-Polytop ist.

f) Betrachten Sie analog die „Kreisungleichungen“ für die beiden kleineren Kreise in obigem Graphen. Durch Kombination der drei „Kreisungleichungen“ erhalten Sie eine weitere gültige Ungleichung. Leiten Sie daraus eine gültige Ungleichung ab, die (K) dominiert, und zeigen Sie so, dass (K) keine Facette des Matching-Polytops induziert.