Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Diskrete Optimierung: Fallstudien aus der Praxis
Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Lifting Knapsack Cover Inequalities

1 Problembeschreibung

Problem: Knapsack

$$\begin{aligned} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i &\leq \beta \\ x &\in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$, $\beta > 0$, $w \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$ und $0 < w_i < \beta$ für alle $i \in N := \{1, \dots, n\}$.

Definition 1 (Knapsack-Polytop)
Das *Knapsack-Polytop* ist definiert als $P_{KNAP} := \operatorname{conv}\left\{x \in \{0,1\}^n : w^T x \leq \beta\right\}$.

2 Knapsack Cover Inequality

Definition 2 (Knapsack Cover)

i) $C \subseteq N$ *Cover* $\Leftrightarrow \sum_{i \in C} w_i > \beta$.

ii) Cover C heißt *minimales Cover* $\Leftrightarrow \forall j \in C : \sum_{i \in C \setminus \{j\}} w_i \leq \beta$.

iii) Für ein *Cover* C ist die *Knapsack Cover Inequality*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1 \tag{C}$$

eine gültige Ungleichung für P_{KNAP}.

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit *Lifting*. Mit dieser Methode lassen sich gültige Ungleichungen häufig noch verstärken (wenn sie noch keine Facette des betrachteten Polytops darstellen). Wir erarbeiten uns die Methode zunächst am Beispiel der Knapsack Cover Inequalities (C). Dazu betrachten wir das folgende Beispiel.

3 Beispiel

Gegeben sei das Knapsack-Problem mit den zulässigen Lösungen

$$X := \left\{x \in \{0,1\}^7 : 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\right\}.$$

Dann ist die Menge $C := \{3, 4, 5, 6\}$ ein minimales Cover und die zugehörige Cover Inequality hat die Form

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3. \tag{C1}$$

Wir haben in der vergangenen Stunde gezeigt, dass die Ungleichung (C1) gültig (und somit eine Schnittebene) für $P_{KNAP} := \text{conv}(X)$ ist.

4 Lifting Cover Inequalities

a) Wie kann die Schnittebene (C1) für P_{KNAP} unter Hinzunahme der Variable x_1 verstärkt werden? In anderen Worten: Für welche Werte $\alpha_1 \geq 0$ ist die Ungleichung

$$\alpha_1 x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3 \tag{C2}$$

gültig für P_{KNAP}?

Untersuchen Sie dazu, welche Werte α_1 annehmen kann, wenn $x_1 = 0$ bzw. $x_1 = 1$ gilt. *Hinweis*: Da die Variablen x_2 und x_7 nicht in (C2) eingehen, reicht es, sich auf den Fall $x_2 = x_7 = 0$ zu beschränken.

Wir beschränken uns auf den Fall $x_2 = x_7 = 0$.

1. Für $x_1 = 0$: α_1 beliebig (denn dann wird Ungleichung (C2) zu (C1) und die ist gültig für P_{KNAP}).
2. Für $x_1 = 1$: Ungleichung (C2) ist gültig für alle $x \in P_{KNAP}$ mit $x_2 = x_7 = 0$ und $x_1 = 1$, wenn sie für alle x gültig ist, die die Ungleichung

$$6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19 - 11$$

erfüllen. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\alpha_1 + \max\{x_3 + x_4 + x_5 + x_6 : 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 8\} \leq 3.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass $\alpha_1 \leq 3 - \gamma$, wobei

$$\gamma := \max\{x_3 + x_4 + x_5 + x_6 : 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 8\} = 1.$$

Es folgt also, dass $0 \leq \alpha_1 \leq 2$ gelten muss.

---

b) Zeigen Sie, dass die Ungleichung (C2) dominant über die Ungleichung (C1) ist.

Beweis. Nach Definition gilt, dass eine für $P_{KNAP} \subseteq \mathbb{R}^n_+$ gültige Ungleichung $(d')^T x \leq \delta'$ mit $d' \in \mathbb{R}^n_+$ und $\delta' \geq 0$ eine andere für P_{KNAP} gültige Ungleichung $d^T x \leq \delta$ mit $d \in \mathbb{R}^n_+$ und

$\delta \geq 0$ dominiert, wenn es ein $\mu \geq 0$ gibt, so dass

$$(\mu d, \mu\delta) \neq (d', \delta') \tag{B1}$$
$$d' \geq \mu d \tag{B2}$$
$$\delta' \leq \mu\delta \tag{B3}$$

gilt. In unserem Beispiel haben wir $d' = (\alpha_1, 0, 1, 1, 1, 1, 0)^T$, $\delta' = 3$, $d = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0)^T$, $\delta = 3$. Damit (C2) Ungleichung (C1) dominiert, muss $\alpha_1 > 0$ gelten. Denn für $\alpha_1 = 0$ wären die beiden Ungleichungen identisch und es gäbe kein μ mit $(\mu d, \mu\delta) \neq (d', \delta')$, so dass Bedingungen (B2) und (B3) erfüllt sind.

Für $\alpha_1 \in (0, 2]$ und z. B. $\mu = 1$ sind jedoch alle obigen drei Bedingungen erfüllt. □

Diesen Vorgang, aus einer gültigen Ungleichung eine (potentiell stärkere) gültige Ungleichung für P_{KNAP} zu konstruieren, bezeichnen wir als *Lifting*, die neue Ungleichung als *Lifted Knapsack Cover Inequality*.

c) Wie kann ein Lifting-Koeffizient α_2 für x_2 berechnet werden, wenn α_1 bereits mit einem Wert belegen worden ist, d. h., wenn x_1 bereits in (C1) „reingeliftet“ worden ist? Formulieren Sie das Lifting der Knapsack Cover Inequality in allgemeiner Form als rekursiven Algorithmus.

Beweis. 1. Sei x_1 bereits in (C1) reingeliftet worden, d. h., wir betrachten die Ungleichung (C2) mit $\alpha_1 \in [0, 2]$, in die wir nun noch x_2 „reinliften“ wollen. Dann stellt sich die Frage, für welche Werte $\alpha_2 \geq 0$ die Ungleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3 \tag{C3}$$

von allen $x \in P_{KNAP}$ erfüllt wird. Wir beschränken uns wieder auf den Fall, dass $x_7 = 0$ (da x_7 nicht in (C3) eingeht) und dass $x_2 = 1$ (da α_2 für $x_2 = 0$ jeden beliebigen Wert annehmen kann). Dann muss α_2 so gewählt werden, dass alle x, die

$$11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19 - 6$$

erfüllen, auch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

erfüllen. Dies gilt genau dann, wenn $\alpha_2 \leq 3 - \gamma$, wobei

$$\gamma := \max\{\alpha_1 x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 : 11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 13\}.$$

2. Wir betrachten nun das allgemeine Knapsack-Problem, dessen zulässige Lösungen $X \subseteq \{0, 1\}^n$ durch folgende Ungleichung definiert werden:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq \beta \tag{1}$$

Seien außerdem $C \subseteq N$ ein minimales Cover, $N \backslash C = \{j_1, \ldots, j_l\}$ und die zu C gehörende Knapsack Cover Inequality:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1. \tag{2}$$

Dann bestimmen wir die Lifting-Koeffizienten α_{j_k} für $k = 1, \ldots, l$ auf folgende Weise rekursiv:

Löse das Problem

$$\begin{aligned} z_{j_k} = \max \ & \sum_{i \in C} x_i + \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_{j_r} x_{j_r}, \\ & \sum_{i \in C} w_i x_i + \sum_{r=1}^{k-1} w_{j_r} x_{j_r} \leq \beta - w_{j_k}, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \ i \in C \cup \{j_1, \ldots, j_{k-1}\} \end{aligned}$$

Definiere $\alpha_{j_k} := |C| - 1 - z_{j_k}$. □

Satz 3
Sei C ein minimales Cover und die Koeffizienten α_i für $i \in N \setminus C$ seien nach obigem Schema berechnet, wobei den Koeffizienten jeweils der höchstmögliche Wert zugewiesen wurde. Dann induziert die Ungleichung

$$\sum_{i \in C} x_i + \sum_{i \in N \backslash C} \alpha_i x_i \leq |C| - 1$$

eine Facette von P_{KNAP}.

Für einen Beweis des Satzes siehe **padberg1973fss** und **padberg1975nzo**

Referenzen