Barbara Wilhelm | Michael Ritter

Lifting Knapsack Cover Inequalities

1 Problembeschreibung

Problem: Knapsack

$$\begin{aligned} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i &\leq \beta \\ x &\in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$, $\beta > 0$, $w \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$ und $0 < w_i < \beta$ für alle $i \in N := \{1, \ldots, n\}$.

Definition 1 (Knapsack-Polytop)
Das *Knapsack-Polytop* ist definiert als $P_{KNAP} := \operatorname{conv}\left\{x \in \{0,1\}^n : w^T x \leq \beta\right\}$.

2 Knapsack Cover Inequality

Definition 2 (Knapsack Cover)

i) $C \subseteq N$ *Cover* $\Leftrightarrow \sum_{i \in C} w_i > \beta$.

ii) Cover C heißt *minimales Cover* $\Leftrightarrow \forall j \in C : \sum_{i \in C \setminus \{j\}} w_i \leq \beta$.

iii) Für ein *Cover* C ist die *Knapsack Cover Inequality*

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1 \tag{C}$$

eine gültige Ungleichung für P_{KNAP}.

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit *Lifting*. Mit dieser Methode lassen sich gültige Ungleichungen häufig noch verstärken (wenn sie noch keine Facette des betrachteten Polytops darstellen). Wir erarbeiten uns die Methode zunächst am Beispiel der Knapsack Cover Inequalities (C). Dazu betrachten wir das folgende Beispiel.

3 Beispiel

Gegeben sei das Knapsack-Problem mit den zulässigen Lösungen

$$X := \left\{x \in \{0,1\}^7 : 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\right\}.$$

Dann ist die Menge $C := \{3, 4, 5, 6\}$ ein minimales Cover und die zugehörige Cover Inequality hat die Form

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3. \tag{C1}$$

Wir haben in der vergangenen Stunde gezeigt, dass die Ungleichung (C1) gültig (und somit eine Schnittebene) für $P_{KNAP} := \mathrm{conv}(X)$ ist.

4 Lifting Cover Inequalities

a) Wie kann die Schnittebene (C1) für P_{KNAP} unter Hinzunahme der Variable x_1 verstärkt werden? In anderen Worten: Für welche Werte $\alpha_1 \geq 0$ ist die Ungleichung

$$\alpha_1 x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3 \tag{C2}$$

gültig für P_{KNAP}?

Untersuchen Sie dazu, welche Werte α_1 annehmen kann, wenn $x_1 = 0$ bzw. $x_1 = 1$ gilt. *Hinweis*: Da die Variablen x_2 und x_7 nicht in (C2) eingehen, reicht es, sich auf den Fall $x_2 = x_7 = 0$ zu beschränken.

b) Zeigen Sie, dass die Ungleichung (C2) auf $[0, 1]^n$ dominant über die Ungleichung (C1) ist.

Diesen Vorgang, aus einer gültigen Ungleichung eine (potentiell stärkere) gültige Ungleichung für P_{KNAP} zu konstruieren, bezeichnen wir als *Lifting*, die neue Ungleichung als *Lifted Knapsack Cover Inequality*.

c) Wie kann ein Lifting-Koeffizient α_2 für x_2 berechnet werden, wenn α_1 bereits mit einem Wert belegen worden ist, d. h., wenn x_1 bereits in (C1) „reingeliftet" worden ist? Formulieren Sie das Lifting der Knapsack Cover Inequality in allgemeiner Form als rekursiven Algorithmus.

Satz 3
Sei C ein minimales Cover und die Koeffizienten α_i für $i \in N \setminus C$ seien nach obigem Schema berechnet, wobei den Koeffizienten jeweils der höchstmögliche Wert zugewiesen wurde. Dann induziert die Ungleichung

$$\sum_{i \in C} x_i + \sum_{i \in N \setminus C} \alpha_i x_i \leq |C| - 1$$

eine Facette von P_{KNAP}.

Für einen Beweis des Satzes siehe [Pad73] und [Pad75].

Referenzen

[Pad73] M.W. Padberg. „On the facial structure of set packing polyhedra". In: *Mathematical Programming* 5 (1), 1973, S. 199–215.

[Pad75] M.W. Padberg. „A note on zero-one programming". In: *Operations Research*, 1975, S. 833–837.