

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik

Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität I

Studienarbeit

**3-Färben von P_7 , Δ , flower-freien Graphen
in polynomieller Zeit**

Julia Böttcher

20. August 2003



Betreuer: Dr. Stefan Hougardy

Zusammenfassung

Ein bekanntes Resultat der Graphentheorie ist die \mathcal{NP} -Vollständigkeit des k -Färbungsproblems [5]. Auch weitreichenden Einschränkungen gegenüber erwies sich dieses Problem als hartnäckig. So konnte zum Beispiel selbst das 3-Färben Δ -freier Graphen als \mathcal{NP} -vollständig nachgewiesen werden [7]. Um so wichtiger bleibt die Suche nach Graphenklassen, für die das k -Färbungsproblem in polynomieller Zeit zu lösen ist.

In dieser Arbeit konstruieren wir einen Polynomialzeitalgorithmus, der entscheidet, ob ein P_7, Δ , flower-freier Graph 3-färbbar ist. Liefert dieser Test ein positives Resultat, so wird außerdem eine zulässige 3-Färbung gefunden. Dabei ist flower der Graph, der aus einem C_5 entsteht, wenn man einen seiner Knoten mit einem Endknoten eines Pfades der Länge 2 identifiziert.

Um dieses Ergebnis zu erhalten, untersuchen wir zunächst den Fall, dass die betrachteten Graphen keinen induzierten Kreis der Länge 5 enthalten. Dies geschieht, indem allgemeiner die 3-Färbbarkeit von solchen P_{2k+1} -freien Graphen ($k > 1$ konstant) gezeigt wird, für die jeder ungerade induzierte Kreis isomorph zum C_{2k+1} ist.

Es folgt eine Behandlung der verbleibenden Graphen mittels einer Reduktion des 3-Färbungsproblems auf 3-SAT und einer anschließenden Umwandlung der gewonnenen 3-SAT-Instanz in ein 2-SAT-Problem.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Überblick	3
3	Begriffe und Notation	3
3.1	Graphen	3
3.2	CNF-Formeln	5
4	Färben von Graphen ohne lange induzierte Pfade und kurze ungerade induzierte Kreise	5
5	Färbungen, Erfüllbarkeitsprobleme, dominierende Mengen	7
5.1	Eine Reduktion von k -Färbbarkeit auf k -SAT	7
5.2	3-Färben von Graphen mit kleinen dominierenden Mengen	8
6	Färben Δ, P_7, flower-freier Graphen mit induziertem C_5	9
6.1	Behandlung der Knoten in C	11
6.2	Behandlung der Knoten in V_1	11
6.3	Behandlung der Knoten in V_2	11
6.4	Beweis von Satz 5	16
7	Fazit	16

1 Einleitung

Fragestellungen im Umfeld von Färbungen gehören zu den ältesten und am intensivsten studierten Graphenproblemen überhaupt. Unglücklicherweise findet sich das k -Färbungsproblem für Graphen mit $k \geq 3$ jedoch auch unter den prominentesten \mathcal{NP} -vollständigen Problemen wieder [5]. Färben ist also schwierig. Dass dieser Aufgabe jedoch nach wie vor sehr viel Aufmerksamkeit geschenkt wird, ist neben den unzähligen praktischen Anwendungen wohl auch seinem anschaulichen Charakter und einer damit verbundenen Vielfalt von Erweiterungen zu verdanken.

Dementsprechend ist es also nicht verwunderlich, dass viel Anstrengung darauf verwandt wird, das Problem von verschiedenen Seiten her so einzugrenzen, dass eine Lösung in polynomieller Zeit möglich wird. Eine Möglichkeit hierfür besteht nun darin, die Form der zugelassenen Eingabegraphen einzuschränken, indem man zum Beispiel bestimmte Strukturen innerhalb von ihnen verbietet. Dass dies sinnvoll ist, zeigt unter anderem der berühmte 4-Farbensatz für planare Graphen (siehe zum Beispiel [13]). Wie bekannt ist, lässt sich diese Klasse von Graphen durch das Verbot von Unterteilungen des $K_{3,3}$ und des K_5 charakterisieren.

Oft begegnen uns die erwähnten Einschränkungen in Form von verbotenen Subgraphen. Doch auch hier stößt man auf negative Resultate. So konnte für Δ -freie Graphen zwar bezüglich ihres asymptotischen Verhaltens gezeigt werden, dass fast alle von ihnen bipartit sind [2]. Insgesamt jedoch bleibt das 3-Färbungsproblem für dreiecksfreie Graphen \mathcal{NP} -vollständig [7].

Verallgemeinert werden konnte diese Erkenntnis in Bezug auf das allgemeine Färbungsproblem. So gelang es Král, Kratochvíl, Tuza und Woeginger in [6] die Komplexität des Färbungsproblems für Graphen mit einem verbotenen induzierten Subgraphen explizit zu beschreiben. Dafür bewiesen sie folgenden Satz.

SATZ 1 (KRÁL, KRATOCHVÍL, TUZA & WOEGINGER [6])

Sei $P_3 \oplus K_1$ der von einem Pfad der Länge 3 und einem zusätzlichen isolierten Knoten induzierte Graph. Dann ist das Färbungsproblem für H -freie Graphen in polynomieller Zeit lösbar, falls H ein induzierter Subgraph von P_4 oder $P_3 \oplus K_1$ ist. Ansonsten ist das Problem \mathcal{NP} -vollständig.

Tatsächlich lässt ihr Beweis bei einer kleinen Einschränkung die folgende stärkere Schlussfolgerung zu.

KOROLLAR 1.1 (KRÁL, KRATOCHVÍL, TUZA & WOEGINGER [6])

Ist H kein induzierter Subgraph von $P_3 \oplus K_1$ und kein Pfad, so ist das 3-Färbungsproblem für H -freie Graphen \mathcal{NP} -vollständig. Es liegt in \mathcal{P} falls H ein induzierter Subgraph von P_4 oder $P_3 \oplus K_1$ ist.

Offen bleibt damit lediglich der Fall, dass H isomorph zu P_k ist, mit $k > 4$. Weitere Fortschritte konnten hier von Randerath und Schiermeyer [10] sowie von Woeginger und Sgall [12] erzielt werden. Sie zeigten, dass auch für $k = 5$ respektive $k = 6$ ein Polynomialzeitalgorithmus für P_k -freie Graphen existiert, der ihr 3-Färbbarkeitsproblem löst.

Das mit dieser Arbeit vorgestellte Ergebnis erweitert diese Bestrebungen in Richtung $k = 7$. Zusätzlich verlangen wir jedoch, dass die gegebenen Graphen dreiecksfrei sind und keine flower enthalten. Insgesamt beweisen wir folgendes Resultat.

SATZ 2

Das 3-Färbbarkeitsproblem von P_7 , Δ , flower-freien Graphen kann in polynomieller Zeit entschieden werden. Ausserdem ist eine zulässige 3-Färbung eines solchen Graphen auch in Polynomialzeit konstruierbar, sofern sie existiert.

Auf der anderen Seite gelang es Woeginger und Sgall [12], bei Erhöhung der Anzahl der erlaubten Farben, \mathcal{NP} -Vollständigkeitsresultate für das Färbbarkeitsproblem P_k -freier Graphen zu finden. Wie sie zeigen, ist das Problem zu entscheiden, ob ein P_8 -freier Graph 5-färbbar ist beziehungsweise ob ein P_{12} -freier Graph 4-färbbar ist, \mathcal{NP} -schwer.

Die Bemühungen um Satz 2 stellen nicht den ersten Versuch dar, neben einem induzierten Pfad noch andere Subgraphen zu verbieten. So beschäftigten sich Randerath und Schiermeyer [10] auch

mit dem Färben von $P_k, K_{1,t}$ -freien Graphen, und gelangten mit einem Resultat von Penrice [8] zu dem folgenden Satz.

SATZ 3 (RANDERATH & SCHIERMEYER [10])

3-Färbbarkeit kann für $P_k, K_{1,t}$ -freie Graphen in polynomieller Zeit entschieden werden. Verläuft dieser Test positiv, so kann ebenfalls mit polynomiellen Zeitaufwand eine zulässige Färbung berechnet werden.

Für den allgemeinen Fall der P_k -freien Graphen G schließlich gelang es Gyárfás [4], die Anzahl der in einer zulässigen Färbung dieser Graphen benötigten Farben nach oben abzuschätzen. Sein Ergebnis gibt eine Schranke für $\chi(G)$ in Abhängigkeit der Cliquenzahl ω an und lautet folgendermaßen.

$$\chi(G) \leq (k-1)^{\omega(G)-1}$$

2 Überblick

Der Beweis unseres Hauptresultates (Satz 2) gliedert sich in 2 Teile, welche durch die Sätze 4 und 5 repräsentiert werden.

Zunächst beschäftigt sich jedoch Abschnitt 3 mit einer Erläuterung der benötigten Definitionen und Symbole.

Ziel von Abschnitt 4 ist es, zu zeigen, dass ein Δ, P_7 , flower-freier Graph G , der zusätzlich keinen C_5 als induzierten Subgraphen enthält, in polynomieller Zeit 3-färbbar ist. Da P_7 kein induzierter Subgraph von G ist, besitzen dann jedoch alle in G induzierten ungeraden Kreise die Länge 7. Wir erhalten das gewünschte Resultat, indem wir eine Verallgemeinerung dieser Klasse von Graphen betrachten und folgenden Satz beweisen.

SATZ 4

Sei $k > 1$ konstant und $G = (V, E)$ ein P_{2k+1} -freier Graph. Sind alle ungeraden induzierten Kreise von G isomorph zum C_{2k+1} , so ist G polynomiell 3-färbbar.

Komplettiert wird dieses Ergebnis von Satz 5.

SATZ 5

P_7, Δ , flower-freie Graphen G , die einen C_5 als induzierten Subgraphen enthalten, können in polynomieller Zeit mit 3 Farben gefärbt werden, falls eine solche Färbung für G existiert. Anderenfalls kann in Polynomialzeit entschieden werden, dass keine zulässige 3-Färbung für G existiert.

Seinem Beweis widmet sich Abschnitt 6. Die dabei angewandten Methoden fundieren auf einer Reduktion des 3-Färbungsproblems auf 3-SAT. Die grundlegenden Ideen hierzu stammen von Edwards [1] und werden in Abschnitt 5 eingeführt.

Abschnitt 7 schließlich liefert eine Zusammenfassung der Ergebnisse und greift weiterführende Fragen auf.

3 Begriffe und Notation

Seien \mathcal{S} und $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_k\}$ zwei Mengen. Zur Vereinfachung der Darstellungen in den folgenden Abschnitten schreiben wir für $\mathcal{S} \setminus \mathcal{T}$ auch $\mathcal{S} - t_1, \dots, t_k$. Analog steht $\mathcal{S} + t_1, \dots, t_k$ für $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$.

3.1 Graphen

Über die gesamte Arbeit hinweg betrachten wir einfache endliche Graphen $G = (V, E)$, die keine Multikanten enthalten. Dabei ist V die Knotenmenge und $E \subseteq \binom{V}{2}$ die Kantenmenge des Graphen. Eine Kante zwischen zwei Knoten $u, v \in V$ notieren wir mit uv . Die mit $N(\mathcal{S})$ bezeichnete

Nachbarschaft einer Knotenmenge \mathcal{S} bildet $\{u \in V : \exists v \in \mathcal{S} uv \in E\}$. $N(v_1, \dots, v_k)$ benutzen wir als Synonym für $N(\{v_1, \dots, v_k\})$.

$G' = (V', E')$ ist ein *Subgraph* von G , falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$. Ist $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ so nennen wir G' den *von V' induzierten Subgraphen* beziehungsweise einen *induzierten Subgraphen von G* und schreiben $G' \leq G$ und $G(V')$ oder auch nur V' für G' . Die in den folgenden Abschnitten betrachteten Subgraphen sind stets induziert. $G \setminus V'$ steht für den von $V \setminus V'$ induzierten Graphen.

Zwei Graphen G und G' heißen *isomorph*, falls es eine bijektive Abbildung der Knotenmengen aufeinander gibt, die die Kantenrelation erhält. Diesen Sachverhalt drücken wir durch $G \cong G'$ aus.

Ein *Weg* $P(u, w)$ zwischen zwei Knoten u und w in G ist eine Folge v_1, v_2, \dots, v_k von Knoten aus V mit $v_1 = u$, $v_k = w$ und $v_i v_{i+1} \in E$ für $0 < i < k$. Die *Länge* eines solchen Weges ist $k - 1$. Ein von den Knoten eines Weges in G induzierter Graph heißt auch in G *induzierter Weg*. Ist $v_i \neq v_j, \forall i \neq j$, so nennen wir $P(u, w)$ *Pfad*. Sind hingegen $v_1 = v_k$ und v_1, \dots, v_{k-1} ein Pfad, dann bezeichnen wir $P(u, w)$ als *Kreis*. P_k bezeichnet den von einem Pfad der Länge $k - 1$ induzierten Graphen und C_k steht für den Graphen, den ein Kreis mit Länge k induziert. C_3 nennen wir auch *Dreieck* und schreiben \triangle . Mit *flower* bezeichnen wir den Graphen, der aus einem C_5 entsteht, wenn man einen seiner Knoten mit einem Endknoten eines disjunkten Pfades der Länge 2 identifiziert.

Der Abstand zweier Knoten $u, w \in V$ in G ist gleich der Länge eines kürzesten Pfades zwischen u und w und wird auch mit $d_G(u, w)$ bezeichnet. Ist aus dem Kontext klar ersichtlich, in welchem Graphen G der Abstand von u und w gemessen wird, so kann der Index G auch weggelassen werden.

Eine *Zusammenhangskomponente* $K \subseteq V$ von G ist eine inklusionsmaximale Menge von Knoten, so dass zwischen je zwei dieser Knoten ein Weg in G existiert. K ist dabei *trivial*, sofern $|K| = 1$. Andernfalls ist K *nichttrivial*. Besteht G aus genau einer Zusammenhangskomponente so sagen wir, G ist *zusammenhängend*. Im Weiteren gehen wir davon aus, dass die untersuchten Graphen zusammenhängend sind, da die betrachteten Probleme auf den einzelnen Komponenten eines Graphen unabhängig von einander gelöst werden können.

Mit *dominierender Menge* bezeichnen wir eine Menge $\mathcal{D} \subseteq V$ mit $\forall v \in V \setminus \mathcal{D} : v \in N(\mathcal{D})$. Allgemein bezeichnen wir für eine beliebige Menge $\mathcal{S} \subseteq V$ die Knoten in $\{v : v \in N(\mathcal{S})\}$ als *dominiert* und die Knoten in \mathcal{S} als *dominierend*.

$\chi : V \mapsto \Gamma$ heißt *zulässige Färbung* oder auch nur *Färbung* von $G = (V, E)$, falls $\chi(u) \neq \chi(v)$ für alle $uv \in E$. Γ ist dabei die Menge der *Farben* von χ und zu $\chi(v)$ sagen wir *Farbe* von v . Eine *Farbklasse* von χ ist eine zu einer Farbe γ korrespondierende Menge der Form $\{v \in V : \chi(v) = \gamma\}$. Ist $|\Gamma| = k$, so ist χ eine k -Färbung. Wir werden im Folgenden auch von einer Färbung sprechen, wenn χ nicht auf allen Elementen von V definiert ist. Manchmal sprechen wir dann auch von einer *partiellen Färbung*. Wird der Definitionsbereich einer partiellen Färbung χ durch Hinzufügen neuer Elemente auf eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ fortgesetzt, so sprechen wir von einer *Fortsetzung* von χ auf V' oder analog davon, dass χ auf V' fortgesetzt wurde. Die chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen G ist definiert als $\chi(G) = \min_{\chi} (|\Gamma|)$, wobei das Minimum über alle zulässigen Färbungen $\chi : V \mapsto \Gamma$ von $G = (V, E)$ gebildet wird. Ist $\chi(G) = 2$, so heißt G auch *bipartit* und die zwei Farbklassen einer 2-Färbung von G heißen *Partitionen* des Graphen.

Das Problem, eine Färbung mit $\chi(G)$ Farben für G zu finden, nennen wir *Färbungsproblem*. Ist eine k -Färbung für ein festgelegtes k gesucht, so sagen wir *k -Färbungsproblem*. Wir beschäftigen uns im Folgenden hauptsächlich mit 3-Färbungsproblemen. In diesem Fall benutzen wir $\{r, g, b\}$ als zur Verfügung stehende Farben. In den gegebenen Abbildungen stellen wir die Farbe r durch ein Quadrat, g durch ein Dreieck und b durch einen Kreis dar.

Die sich anschließende einfache Feststellung rechtfertigt eine weitere Eingrenzung der zu betrachtenden Graphen.

BEMERKUNG: Sei G ein Graph mit zwei Knoten $u, v \in V$, für die $uv \notin E$ und $N(u) \subseteq N(v)$ ist. Dann existiert für G genau dann eine Färbung mit k Farben, wenn $G - u$ k -färbbar ist.

Knoten u und v , auf die das zutrifft, nennen wir *ähnlich*. Im Weiteren genügt es, Graphen ohne ähnliche Knoten zu betrachten.

3.2 CNF-Formeln

Für eine Menge von Variablen \mathcal{X} ist ein *Literal* entweder ein Element $x \in \mathcal{X}$ oder dessen Negation $\neg x$. Eine *Klausel* entsteht durch eine Disjunktion von Literalen x_1, \dots, x_k und wird mit $[x_1 \vee \dots \vee x_k]$ bezeichnet. Besteht die Klausel aus k Literalen, so nennen wir sie auch *k-Klausel*. *Triviale Klauseln* sind 1-Klauseln.

Eine Konjunktion $\mathcal{F} = c_1 \wedge \dots \wedge c_l$ von Klauseln c_1, \dots, c_l bezeichnen wir als *CNF-Formel* oder auch nur *Formel*. Bestehen die Klauseln einer Formel \mathcal{F} jeweils aus k oder weniger Literalen, so sagen wir, \mathcal{F} sei eine *k-CNF-Formel*. Wir betrachten *k-CNF-Formeln* im Folgenden auch einfach als Mengen von Klauseln.

Zwei Formeln werden als *äquivalent* angesehen, falls sie genau die gleichen erfüllenden Belegungen besitzen. Das *Erfüllbarkeitsproblem* beziehungsweise *SAT* für \mathcal{F} besteht aus der Aufgabe, eine erfüllende Belegung für \mathcal{F} zu finden. Ist \mathcal{F} dabei eine *k-CNF-Formel*, so nennen wir das Problem auch *k-SAT*. Aus diesem Grund schreiben wir oft für *k-CNF-Formel* auch *k-SAT-Formel* oder *k-SAT-Instanz*.

4 Färben von Graphen ohne lange induzierte Pfade und kurze ungerade induzierte Kreise

Wie einleitend erläutert, beweisen wir in diesem Abschnitt den folgenden Satz.

SATZ 4

Sei $k > 1$ konstant und $G = (V, E)$ ein P_{2k+1} -freier Graph. Sind alle ungeraden induzierten Kreise von G isomorph zum C_{2k+1} , so ist G polynomiell 3-färbbar.

Hierzu zeigen wir, dass solche Graphen eine besonders einfache Struktur besitzen, die es uns ermöglicht, sie effizient zu färben.

Wir beginnen mit einer einfachen Feststellung über den Zusammenhang von induzierten und nicht-induzierten Kreisen eines Graphen.

BEOBACHTUNG 4.1 Existiert in $G = (V, E)$ ein ungerader Kreis der Länge l , so gibt es auch einen in G induzierten ungeraden Kreis mit einer Länge $\leq l$.

Sei $G = (V, E)$ ein P_{2k+1} -freier Graph, in dem alle induzierten ungeraden Kreise die Länge $2k + 1$ besitzen.

Existiert kein solcher Kreis, so ist G bipartit und damit zweifärbbar. Anderenfalls wählen wir nun einen induzierten ungeraden Kreis C in G sowie einen beliebigen Knoten $v \in C$. Mit L_i , $i \geq 0$ bezeichnen wir die Menge von Knoten, die genau Abstand i von v haben. Wir nennen L_i auch die *i-te Ebene* von G .

Aufgrund von $C_{2i+1} \not\subseteq G$ für $i < k$ ergibt sich folgende Beobachtung.

BEOBACHTUNG 4.2 Für jedes $0 \leq i < k$ und alle $x, x' \in L_i$ ist $xx' \notin E$.

Da wir $v \in C$ gewählt haben, existiert in L_k auf jeden Fall eine Kante. Daraus folgt $|C \cap L_i| = 2$ für $0 < i < k$. Weiterhin ist jede Kante $ww' \in E(L_k)$ in einem ungeraden Kreis, also einem induzierten C_{2k+1} , enthalten. Unter den zu einer solchen Kante gehörenden Kreisen der Länge $2k + 1$ die v enthalten wählen wir jeweils einen aus und nennen ihn $C_{ww'}$.

LEMMA 4.3

Für jeden Knoten $x \in N(C)$ ist $|N(x) \cap C| = 2$. Außerdem ist der Abstand der Knoten in $N(x) \cap C$ sowohl in C als auch in G gleich 2.

BEWEIS:

Sei $x \in N(C)$. Nehmen wir zunächst an, x ist nur zu einem einzigen Knoten c in C adjazent. Dann jedoch induzieren für einen Nachbarn $c' \in N(c) \cap C$ von c die Knoten $C - c' + x$ einen P_{2k+1} in G .

Also gibt es in $N(x) \cap C$ mindestens 2 Knoten c und c' . Da C jedoch ein ungerader Kreis ist, existiert zwischen c und c' nun ein Pfad P ungerader Länge $2l - 1$ in C . x, P, x bildet somit einen Kreis der Länge $2l + 1$ und nach Beobachtung 4.1 existiert dann ein induzierter ungerader Kreis mit Länge höchstens $2l + 1$ in G . Es folgt, dass $l = k$ ist, und damit ergibt sich $d_C(c, c') = 2$ und schließlich $|N(x) \cap C| = 2$. Da $\Delta \not\triangleleft G$ ist auch $d_G(c, c') = 2$. \square

Dies können wir nun nutzen, um zu zeigen, dass $L_{k+1} = \emptyset$ und folglich kein Knoten in G Abstand größer als k von v hat.

LEMMA 4.4

Es gilt $L_i = \emptyset$ für alle $i > k$.

BEWEIS:

Es genügt $L_{k+1} = \emptyset$ zu zeigen. Sei $C \cap L_k = \{c_k, c'_k\}$.

Wir nehmen nun an, es existiere ein Knoten x in L_{k+1} . Ist x adjazent zu C können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $xc_k \in E$ annehmen. Hieraus folgt mit Lemma 4.3, dass es in C einen Knoten c_x gibt mit $d(c_k, c_x) = 2$ und $xc_x \in E$. Aufgrund von $x \in L_{k+1}$ und damit $N(x) \cap C \subseteq \{c_k, c'_k\}$ führt dies jedoch zu einem Widerspruch.

Also ist $d(C, x) > 1$. Sei nun $P_x = x, \dots, c_x$ ein kürzester Pfad von x zu C und x' der Nachbar von c_x auf diesem Pfad. Nach Lemma 4.3 existiert auf C noch genau ein weiterer Knoten c'_x mit $x'c'_x \in E$ und $d_C(c_x, c'_x) = 2$. Dann jedoch gibt es in C einen ungeraden Pfad $P_C = c_x, \dots, c'_x$ der Länge $2k - 1$ zwischen c_x und c'_x . P_x und $P_C - c'_x$ erzeugen nun aber einen induzierten Pfad der Länge mindestens $2 + (2k - 1) - 1 = 2k$ in G . Mit diesem Widerspruch zu den Voraussetzungen ist die Behauptung gezeigt. \square

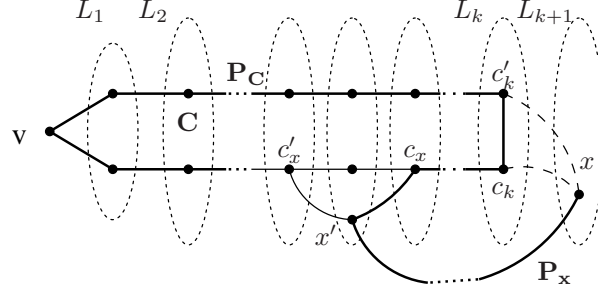


Abbildung 1: Konstruktion eines P_{2k+1} im indirekten Beweis von Lemma 4.4

LEMMA 4.5

Der von L_k induzierte Subgraph ist bipartit.

BEWEIS:

Angenommen, L_k ist nicht bipartit, so existiert in L_k ein ungerader Kreis und damit gemäß Beobachtung 4.1 auch ein induzierter Kreis $C_{L_k} \cong C_{2k+1}$. Sei nun xx' eine Kante in diesem Kreis, $c_k = N_{C_{L_k}}(x) - x'$, $c'_k = N_{C_{L_k}}(c_k) - x$ und x_{k-1} der Nachbar von x in $C_{xx'} \cap L_{k-1}$.

Da $\Delta \not\triangleleft$ ist $c_k x_{k-1} \notin E$. Außerdem führt mit Lemma 4.3 die Annahme, dass $c'_k \in N(C_{xx'})$ ist, zu dem Schluss $c'_k \in N(x, x')$, was einen Widerspruch darstellt, da C_{L_k} induziert ist. Also ist $c'_k \notin N(C_{xx'})$. Mit x_{k-2} und x'_{k-2} bezeichnen wir nun die beiden Knoten in $C_{xx'} \cap L_{k-2}$, so dass x_{k-2} der Nachbar von x_{k-1} und x'_{k-2} der Nachbar von x'_{k-1} auf $C_{xx'}$ ist. P sei der Pfad von x_{k-2} nach x'_{k-2} über v . Der Widerspruch ergibt sich, da P Länge $2k - 4$ hat, wodurch c'_k, c_k, x, x_{k-1}, P einen in G induzierten Pfad der Länge $2k$ darstellt. \square

Damit sind nun die Vorbereitungen getroffen, um Satz 4 zu beweisen.

BEWEIS: (SATZ 4)

Hierfür konstruieren wir eine 3-Färbung $\chi : G \mapsto \{r, g, b\}$ von G wie folgt.

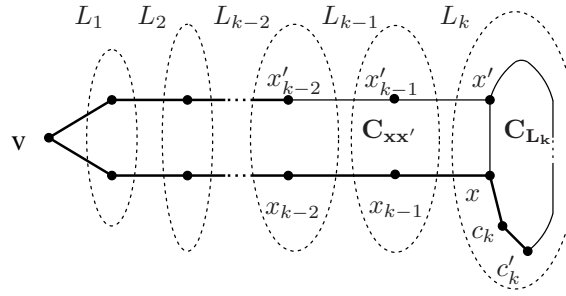


Abbildung 2: Konstruktion eines P_{2k+1} im indirekten Beweis von Lemma 4.5

Nach Lemma 4.4 bilden L_1, \dots, L_{k-1} stabile Mengen. Wir können sie also färben, indem wir zum Beispiel $\chi(v) = r$ und

$$\chi(x) = \begin{cases} r & x \in L_{2i}, i < \lceil k/2 \rceil \\ b & x \in L_{2i+1}, i < \lceil k/2 \rceil \end{cases}$$

setzen. Damit werden alle Knoten in L_{k-1} mit einer einzigen Farbe gefärbt. Lemma 4.5 stellt nun sicher dass L_k mit zwei verbleibenden Farben gefärbt werden kann.

Eine solche Färbung von G lässt sich einfach in Linearzeit $\mathcal{O}(n + m)$ konstruieren. \square

5 Färbungen, Erfüllbarkeitsprobleme, dominierende Mengen

Wie bekannt, kann das 3-SAT-Problem auf das 3-Färbungsproblem für Graphen reduziert werden [3]. In diesem Abschnitt wollen wir nun genau den umgekehrten Weg gehen und erläutern, wie man Färbbarkeitsprobleme durch das Finden von erfüllenden Belegungen lösen kann. Edwards benutzte diese Methode in [1], um polynomielle Algorithmen zur Färbung von Graphen mit kleinen dominierenden Mengen zu konstruieren. Auf diesem Ansatz wird auch der im folgenden Abschnitt vorgestellte Beweis von Satz 5 basieren.

5.1 Eine Reduktion von k -Färbbarkeit auf k -SAT

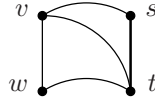
Für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$, dessen k -Färbbarkeit überprüft werden soll, konstruieren wir nun also eine k -SAT-Formel, die wir mit $\mathcal{F}_k(G)$ bezeichnen. Im Folgenden nennen wir $\mathcal{F}_k(G)$ auch die k -SAT-Formel für das k -Färbungsproblem von G oder die Formel, die das Färbungsproblem von G kodiert.

Sei Γ die Menge der Farben, mit denen G gefärbt werden soll. Dann existiert für jedes $v \in V$ und jedes $\gamma \in \Gamma$ eine Variable x_v^γ in unserer k -SAT-Instanz. $\mathcal{F}_k(G)$ enthält nun zunächst für jede Kante $uv \in E$ und jede Farbe $\gamma \in \Gamma$ eine 2-Klausel der Form $[\neg x_u^\gamma \vee \neg x_v^\gamma]$. Diese Klauseln stellen sicher, dass keine zwei Knoten von G , die durch eine Kante verbunden sind, dieselbe Farbe erhalten. Des Weiteren ist es nötig, Klauseln zu $\mathcal{F}_k(G)$ einzufügen, die eine Zuweisung von mehreren Farben zu einem Knoten verhindern. Das Hinzunehmen von 2-Klauseln $[\neg x_v^\gamma \vee \neg x_v^{\gamma'}]$ für alle Knoten $v \in V$ und Paare von verschiedenen Farben $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ gewährleistet das Verlangte. Es bleibt zu garantieren, dass jedem Knoten in $v \in V$ auch tatsächlich eine Farbe aus Γ zugeordnet wird. Dies wird durch die Klauseln $[x_v^{\gamma_1} \vee x_v^{\gamma_2} \vee \dots \vee x_v^{\gamma_k}]$ erreicht, wobei $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ ist. Da dies die einzigen Klauseln in $\mathcal{F}_k(G)$ sind, die mehr als 2 Literale enthalten, nennen wir eine solche Klausel auch *gemeine Klauseln* für v .

Wie leicht einzusehen ist, kann die so konstruierte k -SAT-Formel genau dann erfüllt werden, wenn G mit k Farben färbbar ist. Gleichzeitig liefert uns eine erfüllende Belegung für $\mathcal{F}_k(G)$ auch direkt eine k -Färbung für G . Eine solche Färbung bezeichnen wir auch als *zur erfüllenden Belegung σ von $\mathcal{F}_k(G)$ korrespondierend* und schreiben χ_σ .

BEISPIEL:

Sei G der folgende Graph.



Für diesen Graphen und $\Gamma = \{r, g, b\}$ sind die gemeinsamen Klauseln in $\mathcal{F}_3(G)$ nachfolgend angegeben:

$$\{[x_s^r \vee x_s^b \vee x_s^g], [x_t^r \vee x_t^b \vee x_t^g], [x_v^r \vee x_v^b \vee x_v^g], [x_w^r \vee x_w^b \vee x_w^g]\} \subseteq \mathcal{F}_3(G)$$

Aufgrund der Kante vw werden die Klauseln

$$[\neg x_v^r \vee \neg x_w^r], [\neg x_v^g \vee \neg x_w^g], [\neg x_v^b \vee \neg x_w^b]$$

in \mathcal{F}_3 eingefügt.

◇

5.2 3-Färben von Graphen mit kleinen dominierenden Mengen

In [1] stellt Edwards eine Möglichkeit vor, um sich der gemeinsamen Klauseln in $\mathcal{F}_k(G)$ zu entledigen. Seine Ideen geben wir hier für den Fall $k = 3$ wieder.

Sei \mathcal{F}_3 die für einen Graphen G gewonnene 3-SAT-Instanz zum Färbungsproblem von G . Als Farben verwenden wir r, g und b . Wie zuvor erwähnt, werden wir \mathcal{F}_3 nun benutzen, um das 3-Färbbarkeitsproblem von G zu lösen. Da 2-SAT $\in \mathcal{P}$ kann dies effizient geschehen, falls wir eine Möglichkeit finden, \mathcal{F}_3 in eine äquivalente 2-SAT-Formel umzuwandeln. Das ist beispielsweise mittels adäquater Zusatzinformationen bezüglich der Struktur des untersuchten Graphen erreichbar.

Der von Edwards gewählte Ansatz basiert auf der Betrachtung dominierender Mengen \mathcal{D} in $G = (V, E)$. Ausgangspunkt ist eine feste Vorgabe der Färbung χ für die Knoten in \mathcal{D} . Da nun jedes v in $V \setminus \mathcal{D}$ adjazent zu \mathcal{D} ist, stehen für v lediglich noch 2 Farbklassen in einer Fortsetzung von χ auf G offen. Also kann das Literal, das der durch \mathcal{D} verbotenen Farbe entspricht, in der gemeinsamen Klausel für v gelöscht werden. Wie man leicht einsieht, ergibt eine solche Ersetzung eine zu \mathcal{F}_3 äquivalente 2-SAT-Instanz.

BEISPIEL:

Wir betrachten nun im Graphen G des vorangegangenen Beispiels die dominierende Menge $\{s, t\}$. Ist die Färbung ihrer Knoten mit $\chi(s) = r$ und $\chi(t) = b$ vorgegeben, so werden in \mathcal{F}_3 die gemeinsamen Klauseln für s und t durch die Klauseln

$$[x_s^r], [x_t^b]$$

ersetzt. Außerdem entfernen wir auch die gemeinsamen Klauseln für v und w und fügen

$$[x_v^g], [x_w^r \vee x_w^g]$$

in \mathcal{F}_3 ein

◇

Um zu testen, ob es für G eine zulässige 3-Färbung gibt, genügt es also, dieses Verfahren auf alle möglichen Färbungen von \mathcal{D} anzuwenden und die entstehende 2-SAT-Formel auf Erfüllbarkeit zu testen. Zur Veranschaulichung wird dieser Vorgang von Algorithmus 1 dargestellt.

Damit kann eine zulässige 3-Färbung für G also zum Beispiel dann in Polynomialzeit gewonnen werden, wenn G eine dominierende Menge konstanter Größe besitzt.

Haben wir nun keine dominierende sondern eine beliebige Menge \mathcal{S} von Knoten in G gegeben, so können wir das Verfahren aus Algorithmus 1 analog anwenden, um die gemeinsamen Klauseln für die

Algorithmus 1: Finden einer zulässigen 3-Färbung mittels 2-SAT

Input: ein Graph $G = (V, E)$ und eine dominierende Menge \mathcal{D} für G
Output: eine zulässige Färbung $G \mapsto \{r, g, b\}$ oder “Nein”, falls eine solche nicht existiert

```

begin
  foreach  $\chi : \mathcal{D} \mapsto \{r, g, b\}$  do
     $\mathcal{F}_3 \leftarrow$  3-SAT-Formel für das 3-Färbungsproblem von  $G$  ;
    foreach  $v \in \mathcal{D}$  do
       $\mathcal{F}_3 \leftarrow \mathcal{F}_3 - [x_v^r \vee x_v^b \vee x_v^g] + [x_v^{\chi(v)}]$  ;
    end
    foreach  $v \in V \setminus \mathcal{D}$  do
       $d \leftarrow$  beliebiger Knoten aus  $N(v) \cap \mathcal{D}$  ;
       $\{\gamma, \gamma'\} \leftarrow \{r, g, b\} - \chi(d)$  ;
       $\mathcal{F}_3 \leftarrow \mathcal{F}_3 - [x_v^r \vee x_v^b \vee x_v^g] + [x_v^\gamma \vee x_v^{\gamma'}]$  ;
    end
    /**  $\mathcal{F}_3$  ist jetzt eine 2-SAT-Formel **/
     $\sigma \leftarrow$  erfüllende Belegung für  $\mathcal{F}_3$  ;
    if  $\sigma \neq \text{nil}$  then
      /** 3-Färbung von  $G$ , die zu  $\sigma$  korrespondiert, zurückgeben **/
      return  $\chi_\sigma$  ;
    end
  end
  /** Keine Färbung von  $\mathcal{D}$  konnte auf  $G$  fortgesetzt werden **/
  return “Nein”
end
  
```

Knoten in $N(\mathcal{S})$ aus $\mathcal{F}_3(G)$ zu entfernen. Um die verbleibenden 3-Klauseln in $\mathcal{F}_3(G)$ zu behandeln, sind in diesem Fall andere Methoden vonnöten.

Im Allgemeinen bezeichnen wir zukünftig bei einer solchen Vorgehensweise die Knoten in \mathcal{S} als *vorgefärbt*.

6 Färben Δ, P_7 , flower-freier Graphen mit induziertem C_5

In diesem Abschnitt folgt nun der zweite Teil des Beweises von Satz 2 in Form des folgenden Resultates.

SATZ 5

P_7, Δ , flower-freie Graphen G , die einen C_5 als induzierten Subgraphen enthalten, können in polynomieller Zeit mit 3 Farben gefärbt werden, falls eine solche Färbung für G existiert. Anderenfalls kann in Polynomialzeit entschieden werden, dass keine zulässige 3-Färbung für G existiert.

Hierzu werden wir weitgehend Gebrauch von den im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Ergebnissen machen. Die verwendeten Methoden basieren zum großen Teil auf den Ideen von Randerath und Schiermeyer in [10].

Wir beginnen zunächst mit der Einführung einiger Hilfsmittel, sowie einer allgemeinen Analyse der vorliegenden Graphen.

$G = (V, E)$ sei also ein P_7, Δ , flower-freier Graph der einen induzierten C_5 als Subgraphen enthält. Diesen Kreis bezeichnen wir mit C . Die folgende einfache Beobachtung werden wir in den kommenden Schritten des Beweises einige Male benötigen.

BEOBACHTUNG 6.1 *Aufgrund der Dreiecksfreiheit von G ist jeder Knoten in V zu höchstens 2 Knoten von C adjazent. Abbildung 4 liefert hierzu eine Veranschaulichung.*

Mittels Beobachtung 6.1 und unter der Voraussetzung, dass G keine ähnlichen Knoten enthält, können wir nun die Struktur von G näher beschreiben.

LEMMA 6.2

Sei $G = (V, E)$ ein P_7, Δ , flower-freier Graph ohne ähnliche Knoten, der einen zu C_5 isomorphen induzierten Subgraphen C enthält. Dann gilt $\forall v \in V : d(v, C) \leq 2$.

BEWEIS:

Hierfür genügt es zu zeigen, dass kein Knoten mit Abstand 3 von C in G existiert.

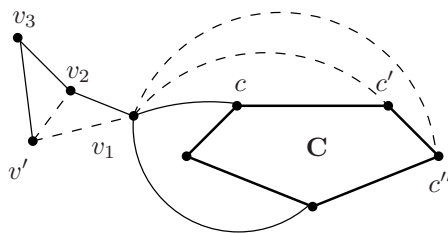


Abbildung 3: Konstruktion eines P_7 im indirekten Beweis von Lemma 6.2

Nehmen wir also an, es gäbe einen Knoten v_3 mit $d(v_3, C) = 3$ und sei v_3, v_2, v_1, c ein kürzester Pfad von v_3 zu C . Nach Beobachtung 6.1 ist v_1 höchstens zu 2 Knoten von C adjazent und somit existieren Knoten c' und c'' in C mit $cc' \in E$ aber $v_1c', v_1c'' \notin E$. Bei einer solchen Wahl der Knoten, bilden $v_3, v_2, v_1, c, c', c''$ einen induzierten P_6 in G . Da G dreiecksfrei ist, muss nun jeder andere Nachbar $v' \in N(v_3) - v_2$ von v_3 adjazent zu v_1 sein, denn sonst ergibt sich $P_7 \trianglelefteq G$. In diesem Fall jedoch sind v_3 und v_1 ähnlich, womit wir einen Widerspruch zu den Voraussetzungen konstruiert haben. \square

Insgesamt wird unser weiteres Vorgehen so aussehen, dass wir eine modifizierte und erweiterte Variante von Algorithmus 1 benutzen, um eine Färbung für G zu finden. Als Menge von vorgefärbten Knoten benutzen wir hierbei C . Im folgenden können wir also davon ausgehen, dass den Knoten c_1, \dots, c_5 von C jeweils eine feste Farbe zugeordnet ist (siehe Abbildung 4). Der letztendlich resultierende Algorithmus ist im Beweis von Satz 5 auf Seite 19 wiedergegeben.

Sei also $\chi : c_1, \dots, c_5 \mapsto \{r, g, b\}$ eine zulässige Färbung von C . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\chi(c_1) = \chi(c_3) = r$, $\chi(c_2) = \chi(c_4) = b$ und $\chi(c_5) = g$. Die verbleibenden Knoten des Graphen unterteilen wir nun in disjunkte Mengen V_i mit $1 \leq i \leq 2$ gemäß ihrer Entfernung von C . Hierbei ist $V_i = \{v \in V : d(v, C) = i\}$.

Der Beweis von Lemma 6.2 zeigt, dass $V = C \cup V_1 \cup V_2$. Abbildung 4 stellt diese Aufteilung des Graphen in C, V_1 und V_2 dar.

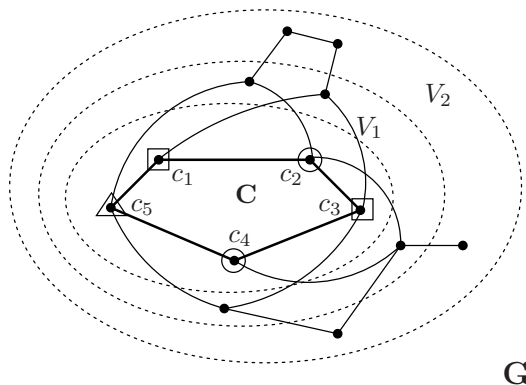


Abbildung 4: Die Einteilung der Knoten von $G = (V, E)$ in die Mengen C, V_1 und V_2

Gemäß des in Abschnitt 5 erläuterten Verfahrens konstruieren wir als nächstes eine 3- \mathcal{SAT} -Formel \mathcal{F}_3 für das Färbungsproblem von G . Anschließend arbeiten wir die Knoten in C , V_1 und V_2 nacheinander ab. Ziel dabei ist es, die 3-Klauseln für die jeweils betrachteten Knoten durch adäquate 2- oder 1-Klauseln zu ersetzen und so letztendlich eine zu \mathcal{F}_3 äquivalente 2- \mathcal{SAT} -Formel zu erhalten.

6.1 Behandlung der Knoten in C

Das folgende Lemma stellt lediglich eine Wiederholung der in Algorithmus 1 vorgestellten Ideen dar.

LEMMA 6.3

\mathcal{F}_3 kann derart in eine äquivalente Formel umgewandelt werden, so dass darin keine 3-Klauseln für $c_1 \dots c_5$ mehr vorkommen.

BEWEIS:

Die gemeinen 3-Klauseln $[x_{c_i}^r \vee x_{c_i}^b \vee x_{c_i}^g]$ der Knoten aus C in \mathcal{F}_3 können wir sofort durch triviale Klauseln $[x_{c_i}^{\chi(c_i)}]$ ersetzen, die angeben, dass die Knoten die ihnen fest zugeordneten Farben erhalten. Die so entstehende Formel ist damit äquivalent zu \mathcal{F}_3 . \square

Dies ermöglicht uns also im Weiteren davon auszugehen, dass in \mathcal{F}_3 keine 3-Klauseln für die Knoten in C enthalten sind.

6.2 Behandlung der Knoten in V_1

Auch die gemeinen Klauseln für Knoten in V_1 können wir leicht beseitigen.

LEMMA 6.4

\mathcal{F}_3 kann so in eine äquivalente Formel umgewandelt werden, dass darin keine 3-Klauseln für Knoten aus V_1 mehr vorkommen.

BEWEIS:

Die Knoten in V_1 sind direkt adjazent zu C und werden damit von C dominiert. Entsprechend der in Abschnitt 5 auf Seite 7 vorgestellten Methode können wir somit die gemeinen Klauseln für diese Knoten in 2- oder 1-Klauseln umwandeln. \square

Zur Vereinfachung der weiteren Betrachtungen nennen wir Knoten $v \in V_1$, für die in diesem Schritt eine 1-Klausel $[x_v^\gamma]$ erzeugt wurde, *determiniert*. Diese Bezeichnung resultiert aus der Tatsache, dass ihre Farbe nun eindeutig als γ festgelegt ist. Alle andere Knoten in V_1 bezeichnen wir als *undeterminiert*.

6.3 Behandlung der Knoten in V_2

Für einen Knoten v_2 in V_2 ist es sinnvoll zu überprüfen, ob für einen ihrer Nachbarn in V_1 im vorangegangenen Schritt eine 1-Klausel konstruiert wurde. In diesem Fall nämlich ist der betroffene Nachbar determiniert und so kann, wie in Abschnitt 5 vorgestellt, die 3-Klausel für v_2 in \mathcal{F}_3 eliminiert werden. Haben wir alle Knoten, auf die das zutrifft, in dieser Weise behandelt, so sind im Folgenden lediglich noch Knoten aus V_2 zu betrachten, die ausschließlich nichtdeterminierte Nachbarn in V_1 haben.

Bevor wir auf diese verbleibenden Knoten eingehen, wird es sich als nützlich erweisen, zunächst die nichtdeterminierten Knoten in V_1 näher zu betrachten. Für einen nichtdeterminierten Knoten v_1 wurde bei der Behandlung von V_1 eine 2-Klausel $[x_{v_1}^{\gamma'} \vee x_{v_1}^{\gamma''}]$ in \mathcal{F}_3 eingefügt, womit es noch 2 Farbklassen gibt, denen v_1 in einer zulässigen Färbung angehören kann. Damit jedoch ist die Nachbarschaft von v_1 in C auf Knoten der verbleibenden Farbe $\{r, g, b\} \setminus \{\gamma', \gamma''\}$ beschränkt. Wir unterscheiden nun die Knoten in V_1 danach, welche Farbe dies ist. Dementsprechend seien mit V_γ

diejenigen Knoten aus V_1 bezeichnet, die nur zu Knoten der Farbe γ in C adjazent sind, d.h.

$$\begin{aligned} V_r &= \{v \in V_1 : N(v) \cap C \subseteq \{c_1, c_3\}\}, \\ V_b &= \{v \in V_1 : N(v) \cap C \subseteq \{c_2, c_4\}\}, \\ V_g &= \{v \in V_1 : N(v) \cap C = \{c_5\}\}. \end{aligned}$$

Des Weiteren schreiben wir $V_\gamma(W)$ für $N(W) \cap V_\gamma$ mit $W \subseteq V_2$ und $\gamma \in \{r, g, b\}$. Zur Vereinfachung der Notation sparen wir die Mengenklammern bei Angabe der Knoten in W aus. Analog schreiben wir $\overline{V}_\gamma(W)$ für $V_\gamma \setminus V_\gamma(W)$.

BEOBSACHTUNG 6.5 *Ist $N(v_2) = V_\gamma(v_2)$ für $v_2 \in V_2$ und ein $\gamma \in \{r, g, b\}$, so lässt sich eine zulässige Fortsetzung χ' von χ auf $G - v_2$ stets auf G fortsetzen.*

Dies ist leicht einzusehen, da V_γ sich höchstens über 2 Farbklassen erstrecken kann. Damit können wir die 3-Klauseln für solche Knoten $v_2 \in V_2$ in \mathcal{F}_3 entfernen und im Folgenden davon ausgehen, dass Beobachtung 6.6 zutrifft.

BEOBSACHTUNG 6.6 *$N(v_2) \neq V_\gamma(v_2)$ für alle $v_2 \in V_2$ und alle Farben γ .*

Schließlich benötigen wir noch die folgende Beobachtung, die unmittelbar aus flower $\not\triangleleft G$ folgt.

BEOBSACHTUNG 6.7 *Für $v_2 \in V_2$ ist $V_g(v_2) = \emptyset$ und für alle $v_r \in V_r(v_2)$ beziehungsweise $v_b \in V_b(v_2)$ gilt $N(v_r) \cap C = \{c_1, c_3\}$ beziehungsweise $N(v_b) \cap C = \{c_2, c_4\}$.*

Nun sind die Vorbereitungen getroffen, um die restlichen Knoten in V_2 nacheinander zu behandeln. Hierzu betrachten wir die Zusammenhangskomponenten in $G(V_2)$ einzeln und unterscheiden dabei zwischen trivialen und nichttrivialen Komponenten. Ist im Folgenden die zu einem Knoten $v_2 \in V_2$ korrespondierende gemeine Klausel in \mathcal{F}_3 erst einmal durch passende 2- oder 1-Klauseln ersetzt, so entfernen wir v_2 aus V_2 ohne dies explizit noch einmal zu erwähnen.

Sei also K eine Komponente des von V_2 in G induzierten Graphen.

1. Fall: K ist nichttriviale Zusammenhangskomponente von $G(V_2)$

Wie sich herausstellen wird, können wir sämtliche gemeine Klauseln für Knoten in nichttrivialen Komponenten aus V_2 einfach aus \mathcal{F}_3 entfernen. Dies liegt darin begründet, daß jede 3-Färbung von $G - K$ auf G fortgesetzt werden kann, wie wir mit Behauptung 6.13 zeigen werden. Zuvor sind jedoch einige strukturelle Untersuchungen und vorbereitende Schritte vonnöten.

Wir beginnen mit folgender Erkenntnis.

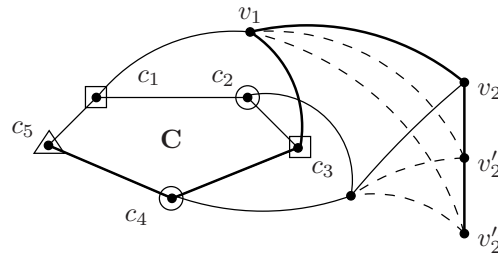
BEHAUPTUNG 6.8 *Seien v_2, v_2'' zwei Knoten in K zwischen denen ein induzierter Pfad gerader Länge l in K existiert. Dann ist $N(v_2) \cap V_1 = N(v_2'') \cap V_1$.*

BEWEIS:

Zunächst beweisen wir die Behauptung für den Fall $l = 2$. Hierzu betrachten wir den induzierten Pfad v_2, v_2', v_2'' der Länge 2 in K . Wegen $\Delta \not\triangleleft G$ wissen wir, dass $N(v_2) \cap N(v_2') = N(v_2') \cap N(v_2'') = \emptyset$ gilt. Nun sei $v_1 \in N(v_2) \cap V_1$ ein Knoten, der nicht adjazent zu v_2'' ist. Aufgrund der Symmetrie, die zwischen V_r und V_b vorliegt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit von $v_1 \in V_r$ und damit $N(v_1) \cap C = \{c_1, c_3\}$ ausgehen. Mit $v_2'', v_2', v_2, v_1, c_3, c_4, c_5$ finden wir dann jedoch einen in G induzierten Pfad der Länge 6 (siehe Abbildung 5). Analog entsteht bei der Existenz eines Knotens in $N(v_2'') \cap V_1 \setminus N(v_2)$ ein Widerspruch zu $P_7 \not\triangleleft G$.

Die Behauptung folgt durch wiederholte Anwendung des Vorangegangenen als transitive Variante des Falls $l = 2$. \square

Als unmittelbare Konsequenz hiervon ergibt sich eine für Färbungen besonders günstige Struktur von K .

Abbildung 5: Konstruktion eines P_7 bei Gegenannahme von Behauptung 6.8 für $l = 2$

BEHAUPTUNG 6.9 K ist bipartit. Die Knoten einer Partition von K besitzen dabei jeweils die selben Nachbarn in V_1 .

BEWEIS:

Ist K nicht bipartit, so existiert ein ungerader Kreis und somit laut Beobachtung 4.1 auch ein induzierter ungerader Kreis C_{odd}^K in K . Da G dreiecksfrei ist, hat C_{odd}^K eine Länge größer als 3, weswegen wir nichtadjazente Knoten v_2, v_2'' in C_{odd}^K finden können. Zwischen v_2 und v_2'' gibt es somit gleichzeitig einen geraden induzierten Pfad P_{even} und einen ungeraden induzierten Pfad P_{odd} einer Länge größer 1. Mit v_2' bezeichnen wir nun den Nachbarn von v_2'' auf P_{odd} . Gemäß Behauptung 6.8 besitzen in diesem Fall sowohl v_2 und v_2'' als auch v_2 und v_2' die selben Nachbarn in V_1 . Damit ist aber auch $N(v_2'') \cap V_1 = N(v_2') \cap V_1$, was $\Delta \not\leq G$ zuwider läuft.

K ist also bipartit. Da K jedoch außerdem zusammenhängend ist, gilt für je zwei Knoten v_2, v_2'' ein und derselben Partition in K , dass $N(v_2) \cap V_1 = N(v_2'') \cap V_1$ ist. \square

Diese Erkenntnis zieht nun nach sich, dass wir beim Versuch G mit drei Farben zu färben, die Komponente K auf eine einzige Kante reduzieren können. Die dazu notwendige Vorgehensweise wird vom folgenden Korollar dargelegt.

KOROLLAR 6.10

Seien v_2, v_2' zwei benachbarte Knoten in K und G' der Graph der durch Entfernen von $K - \{v_2, v_2'\}$ aus G entsteht. Dann ist G genau dann 3-färbbar, wenn G' 3-färbbar ist.

BEWEIS:

Aus $G' \leq G$ folgt trivialerweise, dass G nicht mit 3 Farben gefärbt werden kann, falls G' nicht 3-färbbar ist.

Zum Beweis der entgegengesetzten Richtung gehen wir davon aus, dass eine zulässige Färbung $\chi : V(G') \mapsto \{r, g, b\}$ für G' existiert. Für $v \in K$ bezeichnen wir mit $W(v)$ diejenige Komponente von K , der v angehört. χ kann nun entsprechend Behauptung 6.9 auf G fortgesetzt werden, indem $v \in K$ wie folgt eine Farbe zugewiesen wird.

$$\chi(v) = \begin{cases} \chi(v_2) & v \in W(v_2) \\ \chi(v_2'') & v \in W(v_2'') \end{cases}$$

\square

Infolge dieses Ergebnisses können wir also fortan $K = \{v_2, v_2'\}$ annehmen. Als nächstes analysieren wir die Nachbarschaft von v_2 und v_2' in V_1 .

BEHAUPTUNG 6.11 Sei $\gamma \in \{r, b\}$. Dann folgt aus $V_\gamma(v_2) \neq \emptyset$, dass $V_\gamma(v_2') = \emptyset$ ist.

BEWEIS:

Der Übersichtlichkeit der Notation halber zeigen wir die Behauptung für $\gamma = r$. Der Fall $\gamma = b$ folgt analog.

Nehmen wir also sowohl $V_r(v_2) \neq \emptyset$ als auch $V_r(v'_2) \neq \emptyset$ an und betrachten beliebige Knoten $v_r \in V_r(v_2)$ und $v'_r \in V_r(v'_2)$. Dann gilt $v_r \neq v'_r$ da $\Delta \not\cong G$. Wegen Beobachtung 6.7 sind v_r und v'_r adjazent zu c_3 in C und somit stellt $\Delta \not\cong G$ sicher, dass $v_r v'_r \notin E$. Dann aber induzieren die Knoten $v_r, v_2, v'_2, v'_r, c_3, c_4$ und c_5 eine flower in G (siehe Abbildung 6), was einen Widerspruch zu den Voraussetzungen ergibt. \square

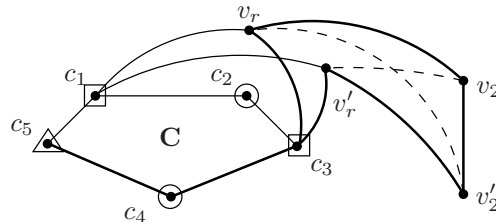


Abbildung 6: Widerspruch durch eine induzierte flower im Beweis von Behauptung 6.11

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dem entsprechend aus Symmetriegründen vom Zutreffen folgender Beobachtung ausgegangen werden.

BEOBSACHTUNG 6.12 $V_b(v_2) = \emptyset$ und $V_r(v'_2) = \emptyset$.

Damit sind nun die Grundlagen geschaffen, um auf die Behandlung von K , beim Versuch G zu färben, einzugehen.

BEHAUPTUNG 6.13 *Jede zulässige 3-Färbung von $G - K$ kann in polynomieller Zeit auf G fortgesetzt werden.*

BEWEIS:

Sei χ eine zulässige 3-Färbung von $G - K$ mit $K = \{v_2, v'_2\}$. Gemäß Beobachtung 6.12 sind $N(v_2) \cap V_1 = V_r(v_2)$ und $N(v'_2) \cap V_1 = V_b(v'_2)$. Nun gilt jedoch $\chi(v_b) \in \{r, g\}$ für alle $v_b \in V_b$ und $\chi(v_r) \in \{b, g\}$ für alle $v_r \in V_r$. Somit erhalten wir mittels $\chi(v_2) = r$ und $\chi(v'_2) = b$ eine zulässige Fortsetzung von χ auf G . \square

Durch wiederholte Anwendung der Behauptungen 6.10 und 6.13 können wir zusammenfassend also Folgendes feststellen und damit die Betrachtung nichttrivialer Komponenten abschließen.

KOROLLAR 6.14

In \mathcal{F}_3 können alle gemeinen Klauseln für Knoten nichttrivialer Komponenten K in G entfernt werden. Sei \mathcal{K} die Menge, die alle Knoten nichttrivialer Komponenten in V_2 enthält. Dann kann eine mittels \mathcal{F}_3 für $G - \mathcal{K}$, ermittelte Färbung in polynomieller Zeit auf G fortgesetzt werden.

2. Fall: $K = \{v_2\}$ ist triviale Zusammenhangskomponente von $G(V_2)$

Zur Behandlung dieses Falls gehen wir davon aus, dass K nicht beliebig gewählt wurde, sondern dass die trivialen Komponenten in V_2 in einer bestimmten Reihenfolge betrachtet werden. Dazu definieren wir die folgende Relation auf den verbleibenden Knoten in V_2 .

DEFINITION: *Seien $\gamma \in \{r, b\}$ und $v, v' \in V_2$ mit $V_\gamma(v) \neq \emptyset$ sowie $V_\gamma(v') \neq \emptyset$. Dann bezeichnen wir mit \preceq_γ die reflexive und transitive Relation, die durch $v \preceq_\gamma v' \Leftrightarrow V_\gamma(v) \subseteq V_\gamma(v')$ gegeben ist. Obwohl eine solche Relation nicht notwendiger Weise antisymmetrisch ist, werden wir sie im Folgenden der Einfachheit halber Ordnung nennen.*

Nach Beobachtung 6.5 und Beobachtung 6.7 gelten $V_r(v_2) \neq \emptyset$ sowie $V_b(v_2) \neq \emptyset$. Daher ist es zulässig \preceq_r als Ordnung für V_2 zu wählen. v_2 sei nun minimal bezüglich dieser Ordnung und v_r sei ein beliebiger Knoten aus $V_r(v_2)$.

Im Weiteren versuchen wir nun, eine 3-Färbung von G zu konstruieren, in der alle Knoten in $V_b(v_2)$ mit g gefärbt werden. Gelingt dies nicht, so existiert auch keine solche Färbung für G , wie

LEMMA 6.17

Bei der gegebenen partiellen Färbung χ von C und V_1 kann entweder eine erfüllende Belegung für \mathcal{F}_3 mittels Algorithmus 3 in polynomieller Zeit konstruiert werden, oder eine solche existiert für χ nicht.

BEWEIS:

Algorithmus 3 formalisiert das im Vorangegangenen erläuterte Verfahren.

Dabei ist $\text{FARBVERSUCH}(G, \mathcal{F}_3, \chi, NEU)$ eine Prozedur, die stets dann aufgerufen wird, wenn eine durch NEU vorgegebene Fortsetzung von χ getestet werden soll. Während jeder Ausführung von FARBVERSUCH innerhalb von Algorithmus 3 ist sichergestellt, dass \mathcal{F}_3 zu einer äquivalenten 2-SAT-Instanz umgewandelt werden kann. Dies gewährleisten die vorangestellten Resultate.

Insgesamt rechtfertigen die Korollare 6.14 und 6.16 samt den mit ihnen gegebenen Erläuterungen das Vorgehen dieses Algorithmus sowie seine polynomielle Laufzeit.

Damit ist Lemma 6.17 bewiesen. □

Prozedur $\text{FARBVERSUCH}(G, \mathcal{F}_3, \chi, NEU)$

Input: $G = (V, E)$ mit Δ, P_7 , flower $\not\triangleleft G$; eine zu $\mathcal{F}_3(G)$ äquivalente Formel, eine partielle Färbung χ der Knoten in G ; eine Menge NEU von neuen Farbzweisungen der Form $\chi(v) = \gamma$ für $v \in V$

begin

repeat

 Füge alle Elemente aus NEU in χ ein ;

$NEU \leftarrow$ die Menge von Farbzweisungen, die sich aus χ eindeutig ergeben ;

until $NEU = \emptyset$;

 Entferne die 3-Klauseln für alle determinierten oder dominierten Knoten aus \mathcal{F}_3 ;

 Füge die entsprechenden 1- oder 2-Klauseln in \mathcal{F}_3 ein ;

if \exists erfüllende Belegung σ für \mathcal{F}_3 **then**

 Gib im aufrufenden Algorithmus σ zurück ;

end

end

6.4 Beweis von Satz 5

Satz 5 ergibt sich nun als Konsequenz der bisher gewonnenen Ergebnisse. Algorithmus 4 stellt die Konstruktion einer 3-Färbung von G noch einmal in Form einer Übersicht dar.

BEWEIS: (SATZ 5)

Die Lemmata 6.3, 6.4 sowie 6.17 zusammen mit den in ihren Beweisen benutzten Verfahren beweisen die Korrektheit sowie eine polynomielle Laufzeit von Algorithmus 4. Somit ist Satz 5 verifiziert. □

7 Fazit

Wir haben in den vorangegangenen Kapiteln gezeigt, dass man für Δ, P_7 , flower-freie Graphen in polynomieller Zeit sowohl entscheiden kann, ob sie mit 3 Farben gefärbt werden können, als auch im positiven Fall eine solche 3-Färbung konstruieren kann. Bei den Betrachtungen erwies es sich als hinreichend, zusammenhängende Graphen ohne ähnliche Knoten in Betracht zu ziehen.

Es wurden zunächst solche Graphen behandelt, die keinen induzierten C_5 enthalten und später die verbleibenden mit induziertem C_5 . Für erstere ergab sich, dass sie stets 3-färbbar sind. Für letztere konnte das Färbungsproblem mittels einer Reduktion auf 2-SAT effizient gelöst werden.

Weiterführend wollen wir am Ende dieser Arbeit auf einige durch die vorangegangenen Abschnitte offengelassenen Fragen hinweisen.

Bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_{ind}(G)$ die Menge der ungeraden Längen, die induzierte Kreise in G annehmen und mit $\mathcal{G}(\mathcal{C}_{ind})$ die Klasse der Graphen G für die $C_k \leq G \Leftrightarrow k \in \mathcal{C}_{ind}$ gilt. Die Frage nach einer Verallgemeinerung von Satz 4 wird durch das sich anschließende offene Problem aufgeworfen.

FRAGE: Kann für Graphen in $\mathcal{G}(\mathcal{C}_{ind})$ für $|\mathcal{C}_{ind}|=1$, oder allgemeiner $|\mathcal{C}_{ind}|$ konstant, das 3-Färbbarkeitsproblem in polynomieller Zeit gelöst werden?

Einen Schritt in diese Richtung gehen Randerath und Schiermeyer in [9], indem sie zu folgendem Ergebnis gelangen.

SATZ 6 (RANDERATH & SCHIERMEYER [9])

Für $k_1 \geq 4$ gerade und $k_2 \geq 5$ ungerade sei $\mathcal{G}(k_1, k_2)$ die Klasse der Graphen in denen alle induzierten Kreise Länge k_1 oder k_2 haben. Dann ist jeder Graph aus $\mathcal{G}(k_1, k_2)$ 3-färbbar.

Auch der durch den Beweis von Satz 5 gegebenen zweite Teil dieser Arbeit führt unmittelbar zu einigen weiterführenden Fragen.

Sei $\mathcal{G}(P_6, \Delta)$ die Klasse der P_6 - und Δ -freien Graphen. In [11] gelang es Randerath, Schiermeyer und Tewes, mittels einer Strukturanalyse von $\mathcal{G}(P_6, \Delta)$ das folgende Resultat zu zeigen.

SATZ 7 (RANDERATH, SCHIERMEYER & TEWES [11])

Sei G ein zusammenhängender Δ, P_6 -freier Graph ohne ähnliche Knoten, der nicht 3-färbbar ist. Dann enthält G den Mycielski-Grötzsch Graphen als induzierten Subgraphen und ist selbst ein induzierter Subgraph des Clebsch Graphen.

Der Mycielski-Grötzsch Graph ist in Abbildung 8 angegeben. Zu einer Illustration des Clebsch Graphen, für den $|V| = 16$ ist, verweisen wir auf [11].

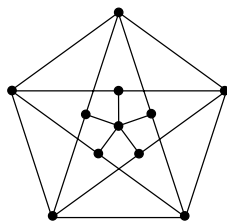


Abbildung 8: Der Mycielski-Grötzsch Graph

Satz 7 zieht nach sich, dass alle Graphen in $\mathcal{G}(P_6, \Delta)$ ohne ähnliche Knoten und mit mehr als 16 Knoten 3-färbbar sind. Damit ergibt sich ein einfacher Algorithmus zum Testen der 3-Färbbarkeit dieser Graphen und die nächste Fragestellung.

FRAGE: Kann man die P_7, Δ -freien Graphen, die nicht 3-färbbar sind, in ähnlicher Weise charakterisieren?

Offen bleiben auch die von Randerath und Schiermeyer in [10] gestellten Fragen, die wir abschließend wiedergeben.

FRAGE: Kann in polynomieller Zeit entschieden werden, ob ein P_7 -freier Graph 3-färbbar ist?

FRAGE: Existiert ein k , so dass für alle $l \leq k$ das 3-Färbungsproblem für P_l -freie Graphen in \mathcal{P} , für alle $l > k$ jedoch dieses Problem \mathcal{NP} -vollständig ist?

Algorithmus 3: Ersetzen der 3-Klauseln für V_2 in \mathcal{F}_3 durch 2- oder 1-Klauseln

Algorithmus: **FärbeV2**(G, \mathcal{F}_3, col)

Input: $G = (V, E)$ mit $\Delta, P_7, flower \not\triangleleft G$; eine zu $\mathcal{F}_3(G)$ äquivalente Formel \mathcal{F}_3 die nur noch 3-Klauseln für Knoten in V_2 enthält; eine partielle Färbung χ der Knoten in G

Output: eine erfüllende Belegung für \mathcal{F}_3 , falls eine solche existiert, sonst *nil*

begin

```

/** Behandlung schon dominierter Knoten in  $V_2$  */
foreach  $v_2 \in V_2$  mit  $\exists v_1 \in N(v_2) \chi(v_1) \neq nil$  do
     $\{\gamma, \gamma'\} \leftarrow \{r, g, b\} - \chi(v_1)$ ;
     $\mathcal{F}_3 \leftarrow \mathcal{F}_3 - [x_{v_2}^r \vee x_{v_2}^b \vee x_{v_2}^g] + [x_{v_2}^\gamma \vee x_{v_2}^{\gamma'}]$ ;
     $V_2 \leftarrow V_2 - v_2$ ;
end
/** Behandlung der nichttrivialen Komponenten in  $V_2$  */
foreach  $K \subseteq V_2$ ,  $K$  nichttriviale Komponente in  $V_2$  do
    foreach  $v_2 \in K$  do
         $\mathcal{F}_3 \leftarrow \mathcal{F}_3 - [x_{v_2}^r \vee x_{v_2}^b \vee x_{v_2}^g]$ ;
    end
end
/** Behandlung der trivialen Komponenten  $v_2$  in  $V_2$  */
foreach  $v_2 \in V_2$ , geordnet mittels  $\preceq_r$  do
    /** O.b.d.A. ist  $V_b(v_2) \neq \emptyset$ , andernfalls ersetze im folgenden  $V_b$  durch  $V_g$  */
    Wähle einen beliebigen Knoten  $v_r \in V_r(v_2)$ ;
    FARBVERSUCH ( $G, \mathcal{F}_3, \chi, \{\chi(v_b) = g : \forall v_b \in V_b(v_2); \chi(v_r) = g\}$ );
    FARBVERSUCH ( $G, \mathcal{F}_3, \chi, \{\chi(v_b) = b : \forall v_b \in V_b(v_2); \chi(v_r) = b\}$ );
     $\mathcal{F}_3 \leftarrow \mathcal{F}_3 - [x_{v_2}^r \vee x_{v_2}^b \vee x_{v_2}^g] + [x_{v_2}^g \vee x_{v_2}^b]$ ;
     $V_2 \leftarrow V_2 - v_2$ ;
end
/**  $\mathcal{F}_3$  ist nun 2-CNF Formel */
if  $\exists$  erfüllende Belegung  $\sigma$  für  $\mathcal{F}_3$  then
    /** Fortsetzen der Belegung auf die nichttrivialen Komponenten in  $V_2$  */
    foreach  $K \subseteq V_2$ ,  $K$  nichttriviale Komponente in  $V_2$  do
        foreach  $v_2 \in K$  do
             $\sigma(x_{v_2}^g) \leftarrow false$ ;
            if  $V_r(v_2) \neq \emptyset$  then  $\sigma(x_{v_2}^r) \leftarrow false, \sigma(x_{v_2}^b) \leftarrow true$ ;
            if  $V_b(v_2) \neq \emptyset$  then  $\sigma(x_{v_2}^b) \leftarrow false, \sigma(x_{v_2}^r) \leftarrow true$ ;
        end
    end
    return  $\sigma$ ;
end
/**  $\mathcal{F}_3$  konnte zu keiner Färbung von  $G$  erweitert werden */
return nil;

```

end

Algorithmus 4: Finden einer 3-Färbung eines Δ, P_7 , flower-freien Graphen mit induziertem C_5 in polynomieller Zeit

Input: $G = (V, E)$ mit Δ, P_7 , flower $\not\trianglelefteq G$ und $C_5 \trianglelefteq G$

Output: Eine 3-Färbung von $G = (V, E)$, falls diese existiert, sonst "Nein"

begin

$C \leftarrow$ ein induzierter C_5 in G ;

$V_1 \leftarrow \{v_1 \in V : d(v_1, C) = 1\}$;

$V_2 \leftarrow \{v_2 \in V : d(v_2, C) = 2\}$;

$\mathcal{F}_3 \leftarrow$ die 3-CNF Formel, die das 3-Färbungproblem für G kodiert ;

foreach Färbung $\chi : C \mapsto \{r, g, b\}$ von C **do**

$V_r \leftarrow \{v_1 \in V_1 : N(v_1) \cap C = \{c \in C : \chi(c) = r\}\}$;

$V_b \leftarrow \{v_1 \in V_1 : N(v_1) \cap C = \{c \in C : \chi(c) = b\}\}$;

$V_g \leftarrow \{v_1 \in V_1 : N(v_1) \cap C = \{c \in C : \chi(c) = g\}\}$;

 /** Behandlung der Knoten in C **/

$\mathcal{F}_3 \leftarrow \mathcal{F}_3 - \{[x_c^r \vee x_c^b \vee x_c^g] : c \in C\} + \{[x_{\chi(c)}] : c \in C\}$;

 /** Behandlung der Knoten in V_1 **/

$\mathcal{F}_3 \leftarrow \mathcal{F}_3 - \{[x_{v_1}^r \vee x_{v_1}^b \vee x_{v_1}^g] : v_1 \in V_1\}$;

foreach $v_1 \in V_1$ **do**

switch v_1 **do**

case $\in V_r$: $\mathcal{F}_3 \leftarrow \mathcal{F}_3 + [x_{v_1}^b \vee x_{v_1}^g]$;

case $\in V_g$: $\mathcal{F}_3 \leftarrow \mathcal{F}_3 + [x_{v_1}^r \vee x_{v_1}^b]$;

case $\in V_b$: $\mathcal{F}_3 \leftarrow \mathcal{F}_3 + [x_{v_1}^g \vee x_{v_1}^r]$;

otherwise

 sei $\gamma \in \{r, g, b\}$ die eindeutige Farbe mit $N(v_1) \cap \{c \in C : \chi(c) = \gamma\} = \emptyset$;

$\chi(v_1) \leftarrow \gamma$;

$\mathcal{F}_3 \leftarrow \mathcal{F}_3 + [x_{v_1}^\gamma]$;

end

end

 /** Behandlung der Knoten in V_2 mittels Algorithmus 3 **/

$\sigma \leftarrow \text{FÄRBEV2}(G, \mathcal{F}_3, \text{col})$;

if $\sigma \neq \text{nil}$ **then**

 /** eine zur Belegung σ korrespondierende 3-Färbung von G **/

return χ_σ ;

end

end

return "Nein" ;

end

Literatur

- [1] K. Edwards. The complexity of coloring problems on dense graphs. *Theoretical Computer Science*, 43(2-3):337–334, 1986. 2, 5, 5.2
- [2] P. Erdős, D.J. Kleitman und B.L. Rothschild. Asymptotic enumeration of K_n -free graphs. In *International Colloquium on Combinatorial theory*, Band 2 von *Atti dei Convegni Lincei 17*, Seiten 19–27. Rom, 1976. 1
- [3] A. Gibbons. *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1985. 5
- [4] A. Gyárfás. Problems from the world surrounding perfect graphs. *Zastosowania Matematyki*, XIX(3-4):413–441, 1987. 1
- [5] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller und J. W. Thatcher (Herausgeber), *Complexity of Computer Computations*, Seiten 85–103. Plenum Press, New York, NY, 1972. (document), 1
- [6] D. Král, J. Kratochvíl, Z. Tuza und J. Woeginger. Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs. In A. Brandstädt und V.B. Le (Herausgeber), *Proceedings of WG, LNCS 2204*, Seiten 254–262. 2001. 1, 1, 1.1
- [7] F. Maffray und M. Preissmann. On the \mathcal{NP} -completeness of the k -colorability problem for triangle-free graphs. *Discrete Mathematics*, 162(1-3):313–317, 1996. (document), 1
- [8] S.G. Penrice. Dominating sets with small clique covering number. *Journal of Graph Theory*, 25(2):101–105, 1997. 1
- [9] B. Randerath und I. Schiermeyer. Colouring graphs with prescribed induced cycle length. *Angewandte Mathematik und Informatik, Universität zu Köln*, Report No. 98-341, 1998. 7, 6
- [10] B. Randerath und I. Schiermeyer. 3-colorability $\in \mathcal{P}$ for P_6 -free graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 136(2-3):299–313, 2004. 1, 1, 3, 6, 7
- [11] B. Randerath, I. Schiermeyer und M. Tewes. Three-colourability and forbidden subgraphs II: Polynomial algorithms. *Discrete Mathematics*, 251:137–153, 2002. 7, 7
- [12] J. Sgall und G. Woeginger. The complexity of coloring graphs without long induced paths. *ACTA CYBERNETICA*, 15(1):107–117, 2001. 1, 1
- [13] R. Thomas. The four color theorem. <http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html>. 1