

Computational Convexity  
Optimale Containment Probleme

René Brandenberg

8. August 2006

# Inhaltsverzeichnis

0	Wiederholung	1
1	Polarität	6
2	Komplexitätstheorie	9
3	Einige NP-vollständige Probleme	15
4	Norm-Maximierung	18
5	Das allgemeine Containment Problem	26
6	Geometrische und algorithmische Grundlagen der Radianberechnung	28
7	In- und Umradius - optimales Containment unter Homothetie	38
8	Dicke und Durchmesser	44
9	Die anderen Radian	48
10	Multiples Containment unter Homothetie	51
11	Approximation und Core-Sets	53
12	Adaptive Ansätze	57

## 0 Wiederholung

### 0.1 Definition

a) Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^d$  heißt Linearkombination der Vektoren  $v^1, \dots, v^k \in \mathbb{R}^d$ , wenn  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  existieren, sodass  $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i v^i$ . Gilt zusätzlich  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , so heißt  $v$  Affinkombination der  $v^1, \dots, v^k$ . Gilt  $\lambda_i \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq k$ , dann heißt  $v$  Positivkombination der  $v^1, \dots, v^k$  und gilt wiederum zusätzlich  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , so heißt  $v$  Konvexkombination der  $v^1, \dots, v^k$ .

BEMERKUNG: Offensichtlich ist  $v$  Linearkombination von  $v^1, \dots, v^k$ , genau dann wenn  $v$  Affinkombination von  $v^1, \dots, v^k, 0$  ist.

- b)  $A \subset \mathbb{R}^d$  heißt linearer (affiner) Unterraum des  $\mathbb{R}^d$ , wenn  $A$  bezüglich Linearkombinationen (Affinkombinationen) abgeschlossen ist. Ist  $A$  bezüglich Positivkombinationen abgeschlossen, so heißt  $A$  Kegel, ist  $A$  bezüglich Konvexkombinationen abgeschlossen, so heißt  $A$  konvex.

BEMERKUNG: Insbesondere gilt für konvexe Mengen damit natürlich, dass für alle  $x, y \in A$  schon das Segment  $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$  Teilmenge von  $A$  ist.

- c) Die lineare Hülle von  $A \subset \mathbb{R}^d$  ist definiert durch  $\text{lin}(A) := \bigcap \{F : A \subset F \subset \mathbb{R}^d, F \text{ linearer Unterraum}\}$ . Analog werden die affine Hülle  $\text{aff}(A)$ , die positive Hülle  $\text{pos}(A)$  und die konvexe Hülle  $\text{conv}(A)$  definiert.
- d) Die Vektoren  $v^1, \dots, v^k$  heißen linear (affin) unabhängig (kurz l.u. bzw. a.u.), wenn für alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  mit  $\sum_{i=1}^k \lambda_i v^i = 0$  (und  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ ) folgt, dass  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ ; andernfalls heißen sie linear (affin) abhängig.

BEMERKUNG:

- (i)  $v^1, \dots, v^k$  l.u.  $\Leftrightarrow v^1, \dots, v^k, 0$  a.u.  
(ii)  $v^1, \dots, v^k$  a.u.  $\Leftrightarrow v^1 - v^k, \dots, v^{k-1} - v^k$  l.u.
- e) Ist  $F$  ein affiner Unterraum und  $k$  derart, dass  $k + 1$  aber nicht  $k + 2$  affin unabhängige Vektoren in  $F$  enthalten sind, dann heißt  $k$  die Dimension von  $F$ , kurz  $\dim(F) = k$ . Für allgemeine Mengen  $A$  setzt man  $\dim(A) = \dim(\text{aff}(A))$ .

BEMERKUNG: Man beachte, dass die Dimension eines linearen Unterraums aufgrund der Bemerkung nach Teil (d) der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren entspricht.

## 0.2 Satz (Caratheodory)

Sei  $A \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\dim(A) = k$ . Dann ist jedes  $x \in \text{conv}(A)$  Konvexkombination von höchstens  $k + 1$  Vektoren aus  $A$ .

## 0.3 Definition

- a) Seien  $A, B \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Menge  $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$  heißt Minkowski-Summe von  $A$  und  $B$ , die Menge  $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$  heißt Dilatat von  $A$  um  $\lambda$ . Weiter sei  $-A := (-1)A$ ,  $A - B := A + (-B)$  und  $A + x := A + \{x\}$ .

- b) Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  heißt 0-symmetrisch, wenn  $A = -A$  gilt und symmetrisch, falls ein Zentrum  $c \in \mathbb{R}^d$  existiert, sodass  $A - c$  0-symmetrisch ist.
- c) Sei  $\mathbb{X}$  ein  $d$ -dimensionaler reellwertiger Vektorraum und  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{X}$ . Dann heißt  $\mathbb{M} = (\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  Minkowski-Raum. Die zugehörige Einheitskugel ist  $\mathbb{B} = \{x : \|x\| \leq 1\}$  und die Einheitskugel  $\mathbb{S} = \{x : \|x\| = 1\}$ . Ist  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$  und  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ ,  $p \in [0, \infty]$ , so schreiben wir auch  $\mathbb{R}_p^d$  für  $\mathbb{M}$ .

BEMERKUNG: Da jeder reellwertige  $d$ -dimensionale Vektorraum isomorph zu  $\mathbb{R}^d$  ist, betrachten wir meistens nur den Fall  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ .

- d) Ein Körper  $K$  ist eine nicht-leere, kompakte und konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ .

BEMERKUNG: Jeder volldimensionale symmetrische Körper entspricht einer Einheitskugel eines Minkowski-Raums.

#### 0.4 Definition

Einige spezielle konvexe Mengen:

- a) Sei  $k \leq d$  und  $F$  ein  $k$ -dimensionaler linearer Unterraum des  $\mathbb{R}^d$ ,  $c \in \mathbb{R}^d$  und  $\rho \geq 0$ . Dann heißt  $c + \rho(\mathbb{B} \cap F)$  ( $c + \rho(\mathbb{S} \cap F)$ )  $k$ -Kugel ( $k$ -Sphere) mit Mittelpunkt  $c$  und Radius  $\rho$ .
- b) Ist  $F$  ein  $(d - k)$ -dimensionaler affiner Unterraum des  $\mathbb{R}^d$  und  $\rho \geq 0$ , so heißt  $F + \rho\mathbb{B}$   $k$ -Zylinder mit Radius  $\rho$ .

BEMERKUNG: Man beachte, dass die Begriffe Kugel, Sphere und Zylinder normabhängig sind und dass in  $\mathbb{R}_2^d$  die orthogonale Projektion eines  $k$ -Zylinders  $F + \rho\mathbb{B}$  auf  $F^\perp$  eine  $k - Kugel$  ist.

- c) Sei  $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann heißt der affine  $(d - 1)$ -dimensionale Unterraum  $H_{u,\alpha} = \{x : u^T x = \alpha\}$  auch Hyperebene. Die Mengen  $H_{u,\alpha}^+ = \{x : u^T x \leq \alpha\}$  und  $H_{u,\alpha}^- = \{x : u^T x \geq \alpha\}$  heißen positiver bzw. negativer Halbraum und der Vektor  $u$  äußere Normale.
- d) Ein Polyeder  $P \subset \mathbb{R}^d$  ist der Schnitt endlich vieler Halbräume, also  $P = \bigcap_{k=1}^m \{x : (u^k)^T x \leq \alpha_k\}$ . Ist  $P$  beschränkt so ist  $P$  ein Polytop und kann auch in der Form  $P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^k\}$  dargestellt werden. Die Beschreibung von Polytopen als Schnitt von Halbräumen nennen wir  $\mathcal{H}$ -Darstellung, die Beschreibung von Polytopen als konvexe Hülle von Vektoren  $\mathcal{V}$ -Darstellung.

BEMERKUNG: Die Halbräume einer irredundanten  $\mathcal{H}$ -Darstellung induzieren genau die Facetten des Polytopes, die Vektoren einer irredundanten  $\mathcal{V}$ -Darstellung genau die Ecken.

e) Ist  $k \leq d$  und sind  $v^1, \dots, v^{k+1} \in \mathbb{R}^d$  a.u., so heißt  $S = \text{conv}\{v^1, \dots, v^{k+1}\}$   $(k-)$ Simplex.

f) Ein Zonotop  $Z$  ist die Minkowski-Summe einer endlichen Anzahl von Segmenten  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Ist  $c^i$  Mittelpunkt des Segments  $S_i$  so gilt  $Z = \sum_{i=1}^m S_i = \sum_{i=1}^m c^i + \sum_{i=1}^m (S_i - c^i)$ , wobei  $\sum_{i=1}^m c^i$  das Zentrum von  $Z$  ist und jedes Segment  $S_i - c^i$  Mittelpunkt 0 besitzt.

Sind  $c, z^1, \dots, z^m \in \mathbb{R}^d$  so heißt die Beschreibung des Zonotops  $Z = c + \sum_{i=1}^m [-z^i, z^i] = \sum_{i=1}^m [-1, 1]z^i$ ,  $i = 1, \dots, m$  kanonische  $\mathcal{S}$ -Darstellung. Ist  $Z = \sum_{i=1}^m [0, 1]z^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , so heißt die Beschreibung standard  $\mathcal{S}$ -Darstellung.

BEMERKUNG: Jedes 2-dimensionale symmetrische Polygon ist ein Zonotop, aber in höheren Dimensionen gibt es symmetrische Polytope die keine Zonotope sind (siehe Übung 2.3).

g) Ist  $Z$  ein Zonotop, sodass die  $z^i$  einer  $\mathcal{S}$ -Darstellung von  $Z$  linear unabhängig gewählt werden können, so heißt  $Z$  Parallelotop. (evtl. in  $\mathcal{S}$ -Darstellung)

h) Sind  $v^1, \dots, v^d \in \mathbb{R}^d$  paarweise orthogonal, so heißt  $B = c + \bigcap_{i=1}^k H_{\pm v^i, 1}^+ \cap \bigcap_{i=k+1}^d H_{\pm v^i, 0}^+$  Box und  $X = c + \text{conv}\{\pm v^1, \dots, \pm v^k\}$  Kreuzpolytop. Sind die  $v^i$  alle normiert, dann heißt  $B$  Würfel und  $X$  reguläres Kreuzpolytop.

BEMERKUNG: Jede Box  $B$  ist ein Parallelotop,  $B = \sum_{i=1}^k [-1, 1] \frac{v^i}{\|v^i\|_2}$  eine zugehörige  $\mathcal{S}$ -Darstellung. Kreuzpolytope sind außer für  $k = 2$  keine Zonotope.

## 0.5 Definition

Sei  $A \subset \mathbb{R}^d$ .

a)  $\text{int}(A)$ ,  $\text{cl}(A)$  und  $\text{bd}(A)$  bezeichnen das Innere, den Abschluss bzw. den Rand von  $A$ .

b)  $\text{relint}(A)$  und  $\text{relbd}(A)$  bezeichnen das relative Innere bzw. den relativen Rand von  $A$  bezüglich  $\text{aff}(A)$ .

### 0.6 Definition

Seien  $A, B \subset \mathbb{R}^d$ ,  $u \in \mathbb{R}^d$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Gilt  $A \subset H_{u,\alpha}^+$  und  $B \subset H_{u,\alpha}^-$  oder umgekehrt so trennt die Hyperebene  $H_{u,\alpha}$  die Mengen  $A$  und  $B$ . Gilt für  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$  sogar, dass  $A \subset H_{u,\alpha_1}^+$  und  $B \subset H_{u,\alpha_2}^-$ , so trennt die Hyperebene  $H_{u,\alpha}$  die Mengen  $A$  und  $B$  streng.

### 0.7 Satz

Seien  $A, B \subset \mathbb{R}^d$  nicht-leer und konvex.

- a) Gilt  $\text{aff}(A \cup B) = \mathbb{R}^d$ , dann sind  $A$  und  $B$  genau dann trennbar, wenn  $\text{relint}(A) \cap \text{relint}(B) = \emptyset$ .

BEMERKUNG: Die Bedingung  $\text{aff}(A \cup B) = \mathbb{R}^d$  ist notwendig für die Hinrichtung, da andernfalls alles in einer Hyperebene liegt, diese dann aber trennend wäre.

- b) Ist  $A$  beschränkt und  $\text{cl}(A) \cap \text{cl}(B) = \emptyset$ , dann sind  $A$  und  $B$  streng trennbar. Für Polyeder gilt die Aussage auch ohne die Einschränkung, dass  $A$  beschränkt ist.

### 0.8 Definition

- a) Sei  $A \subset \mathbb{R}^d$ ,  $v \in \text{bd}(A)$  und  $H$  eine Hyperebene, sodass  $A \subset H^+$  und  $v \in H$ . Dann heißt  $A$  in  $v$  stützbar,  $H$  Stützhyperebene an  $A$  im Punkt  $v$  und  $H^+$  zugehöriger Stützhalbraum.
- b) Sei  $K \subset \mathbb{R}^d$  konvex,  $F \subset K$  und  $0 \leq j \leq \dim(K) - 1$ .  $F$  heißt  $j$ -Seite von  $K$ , wenn  $\dim(F) = j$  ist und es eine Stützhyperebene  $H$  an  $K$  gibt mit  $K \cap H = F$ . Seiten der Dimension  $\dim(K) - 1$  heißen Facetten, Seiten der Dimension 1 Kanten und Seiten der Dimension 0 Ecken.  $K$  und  $\emptyset$  werden uneigentliche Seiten genannt, alle anderen eigentliche.
- c) Sei  $K \subset \mathbb{R}^d$  konvex und  $v \in K$ . Gilt  $v \notin \text{conv}(K \setminus \{v\})$ , dann heißt  $v$  Extrempunkt von  $K$ .

BEMERKUNG: Ist  $K$  abgeschlossen, so ist jede Ecke auch Extrempunkt. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen aber nicht!

### 0.9 Korollar

Sei  $K \subset \mathbb{R}^d$  konvex. Dann ist  $v \in \text{bd}(K)$ , genau dann wenn  $K$  in  $v$  stützbar ist.

### 0.10 Satz (Minkowski)

Jeder Körper  $K$  ist die konvexe Hülle seiner Extrempunkte.

BEMERKUNG: Fasst man die Aussagen der Sätze 0.2 und 0.10 zusammen, so folgt, dass jedes  $x \in K$  bereits in einem durch Extrempunkte von  $K$  aufgespannten Simplex liegt.

## 1 Polarität

Sei  $\mathbb{M} = (\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  ein  $d$ -dimensionaler Minkowski-Raum über  $\mathbb{R}$ .

### 1.1 Definition

$\mathbb{X}^* = L(\mathbb{X}, \mathbb{R}) = \{x_* : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} : x_* \text{ linear}\}$  heißt konjugierter Vektorraum zu  $\mathbb{X}$ .

### 1.2 Lemma

- $\mathbb{X}^*$  ist ein  $d$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .
- Sei  $e^1, \dots, e^d$  eine Basis von  $\mathbb{X}$ . Dann bilden die Vektoren  $e_*^1, \dots, e_*^d$ , die durch die Setzung  $e_*^i(e^j) = \delta_{ij}$  definiert sind, eine Basis von  $\mathbb{X}^*$  (die zu  $e^1, \dots, e^d$  konjugierte Basis).
- Sei  $e^1, \dots, e^d$  eine Basis von  $\mathbb{X}$  und  $e_*^1, \dots, e_*^d$  die zugehörige konjugierte Basis von  $\mathbb{X}^*$ . Ferner sei  $e_{**}^1, \dots, e_{**}^d$  die zu  $e_*^1, \dots, e_*^d$  gehörige konjugierte Basis von  $(\mathbb{X}^*)^*$ . Dann sind durch die linearen Abbildungen  $\Psi : \mathbb{X}^* \rightarrow \mathbb{X}$ ,  $\Psi(e_*^i) = e^i$  und  $\Phi : (\mathbb{X}^*)^* \rightarrow \mathbb{X}$ ,  $\Phi(e_{**}^i) = e^i$  Vektorraumisomorphismen gegeben mittels derer  $\mathbb{X}$  und  $\mathbb{X}^*$  bzw.  $\mathbb{X}$  und  $(\mathbb{X}^*)^*$  oftmals identifiziert werden.

### 1.3 Definition

- Die durch  $\langle u, x \rangle = u(x)$  definierte Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{X}^* \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt kanonische Bilinearform. Ist  $x = \sum_{i=1}^d x_i e^i$  und  $u = \sum_{i=1}^d u_i e_*^i$ , dann gilt  $\langle u, x \rangle = \sum_{i=1}^d u_i x_i = u^T x$ .
- Durch  $\|u\|^* = \max\{\langle u, x \rangle : x \in \mathbb{B}\}$  ist eine Norm auf  $\mathbb{X}^*$  definiert, d.h.  $\mathbb{M}^* = (\mathbb{X}^*, \|\cdot\|^*)$  ist wieder ein Minkowski-Raum. Dabei heißen  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{M}^*$  konjugiert, ebenso  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|^*$ .

BEMERKUNG: Identifiziert man  $\mathbb{X}^{**}$  mit  $\mathbb{X}$  so erhält man  $\|\cdot\|^{**} = \|\cdot\|$ .

### 1.4 Beispiel

Seien  $p, q \in [0, \infty]$ , sodass  $1/p + 1/q = 1$  und  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_p^d$ . Dann gilt nach der Hölderschen Ungleichung  $\forall x \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{1/p} \leq 1$ , dass

$$\begin{aligned} |\langle u, x \rangle| &= \left| \sum_{i=1}^d u_i x_i \right| \leq \sum_{i=1}^d |u_i x_i| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^d |u_i|^q \right)^{1/q} \left( \sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^d |u_i|^q \right)^{1/q} = \|u\|_q, \quad \forall u \in \mathbb{X}^*. \end{aligned}$$

Gleichheit tritt in der Hölderschen Ungleichung für den Fall auf, dass ein  $\lambda \geq 0$  existiert mit  $|x_i|^p = \lambda |u_i|^q$ ,  $1 \leq i \leq d$ . Unter dieser Bedingung können wir auch die Striktheit der anderen Ungleichungen erzeugen. Es gilt also  $\max\{\langle u, x \rangle : x \in \mathbb{B}\} = \|u\|_q$ . Folglich sind  $\|\cdot\|_p$  und  $\|\cdot\|_q$  konjugiert.

Für  $p = 2$  gilt  $q = 2$ . Für  $p = 1$  folgt  $q = \infty$  und vice versa.

### 1.5 Definition

Sei  $A \subset \mathbb{M}$ . Das Polare (die Polarmenge)  $A^\circ$  von  $A$  ist definiert durch  $A^\circ = \{u \in \mathbb{M}^* : \langle u, x \rangle \leq 1 \ \forall x \in A\}$ .

BEMERKUNG: Analog werden die Polaren für Teilmengen von  $\mathbb{M}^*$  definiert, die durch die Identifikation von  $\mathbb{M}^{**}$  und  $\mathbb{M}$  dann auch als Teilmengen von  $\mathbb{M}$  aufgefasst werden können.

### 1.6 Beispiel

- a) Sei  $F$  ein linearer Teilraum von  $\mathbb{M}$ . Dann ist  $F^\circ$  ein linearer Teilraum von  $\mathbb{M}^*$  und es gilt  $\dim(F) + \dim(F^\circ) = d$ . (Sei  $e^1, \dots, e^k$  eine Basis von  $F$ , dann ist offensichtlich  $u \in F^\circ \Leftrightarrow \langle u, e^i \rangle = 0$ ,  $1 \leq i \leq k$ .)
- b) Für  $\rho > 0$  gilt  $(\rho\mathbb{B})^\circ = 1/\rho \mathbb{B}^*$ . (Also insbesondere, dass das Polare der Einheitskugel die konjugierte Einheitskugel ist.)

BEWEIS: Es gilt  $u \in (\rho\mathbb{B})^\circ \Leftrightarrow u(x) \leq 1, \forall x \in \rho\mathbb{B}$ . D.h.  $\|u\|^* \leq 1/\rho$ . Andererseits gilt  $u \in (1/\rho)\mathbb{B}^* \Leftrightarrow \|u\|^* \leq 1/\rho$ . Es folgt  $u(x) \leq 1/\rho, \forall x \in \mathbb{B}$  und damit  $u(x) \leq 1, \forall x \in \rho\mathbb{B}$ .  $\square$

### 1.7 Lemma

Sei  $A \subset B \subset \mathbb{M}$ . Dann gilt  $B^\circ \subset A^\circ$ .

BEWEIS: Sei  $u \in B^\circ$ . Dann gilt  $\langle u, x \rangle \leq 1, \forall x \in B$ , also insbesondere für alle  $x \in A$ . Folglich ist  $u \in A^\circ$ .  $\square$

### 1.8 Korollar

Sei  $A \subset \mathbb{M}$ . Es gilt  $A$  ist beschränkt  $\Leftrightarrow 0 \in \text{int}(A^\circ)$  und analog andersherum.

### 1.9 Lemma

Seien  $A, B \subset \mathbb{M}$ . Dann gilt

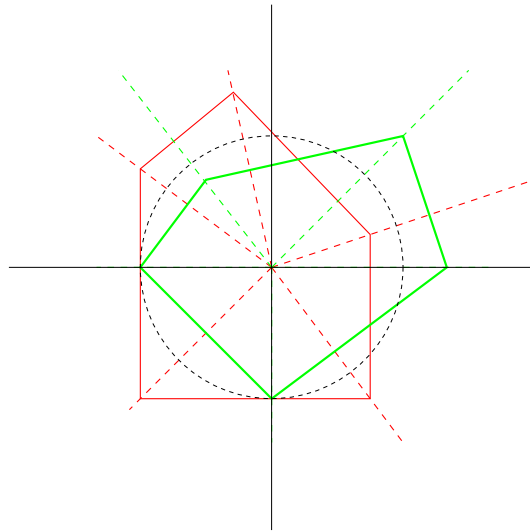
- $A^\circ$  ist abgeschlossen und konvex und  $0 \in A^\circ$ .
- $A^\circ = (\text{cl}(A))^\circ = (\text{conv}(A))^\circ$ .
- $(A^\circ)^\circ = \text{cl}(\text{conv}(A \cup \{0\}))$  (nach Identifikation von  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{M}^{**}$ ).

BEMERKUNG: Insbesondere gilt für jede abgeschlossene konvexe Menge  $K$  mit  $0 \in K$ , dass  $(K^\circ)^\circ = K$ .

### 1.10 Korollar

Sei  $P = \{v^1, \dots, v^m\} \subset \mathbb{M}$  ein Polytop mit  $0 \in \text{int}(P)$ . Dann ist  $P^\circ = \bigcap_{i=1}^m \{u \in \mathbb{M}^* : \langle u, v^i \rangle \leq 1\}$  wieder ein Polytop.

BEWEIS: Nach Lemma 1.9(b) gilt  $P^\circ = (\{v^1, \dots, v^m\})^\circ = \bigcap_{i=1}^m \{u \in \mathbb{M}^* : \langle u, v^i \rangle \leq 1\}$ .  $\square$



BEMERKUNG: Sei  $P$  ein Polytop mit  $0 \in \text{int}(P)$ . Dann sind die Seitenverbände von  $P$  und  $P^\circ$  antiisomorph.

## 2 Komplexitätstheorie

BEMERKUNG: Einige der im Folgenden verwendeten Begriffe werden nicht präzise definiert, da dies den Rahmen dieser Veranstaltung sprengen würde. Wer die exakten Termini nachlesen möchte, kann dies u.a. in [7] und [19].

### Problemstellung:

Gegeben: Ein “algorithmisches Problem”.

Gesucht: Ein “effizienter Algorithmus” zur Lösung des Verfahrens, bzw. eine Aussage derart, dass kein solcher Algorithmus existiert.

BEMERKUNG: Wir suchen also nach einer möglichen Klassifizierung von algorithmischen Aufgabenstellungen in “leichte” und “schwere” Probleme.

### Einige Typen algorithmischer Aufgabenstellungen

- Entscheidungsprobleme (Ja-/Nein-Probleme)
  - Existenzprobleme (Existiert ein Hamiltonkreis im gegebenen Graphen  $G$ ?)
  - Eindeutigkeitsprobleme (Gibt es mehr als einen Hamiltonkreis in  $G$ ? Ist der gegebene Hamiltonkreis eindeutig? )
  - Zugehörigkeitsprobleme (Gehört  $x$  zum Polytop  $P$ ?)
- Konstruktionsprobleme (Bestimme einen Hamiltonkreis in  $G$ .)
- Optimierungsprobleme (Bestimme die Länge einer kürzesten TSP-Tour in  $G$ . Bestimme eine kürzeste TSP-Tour in  $G$  (Opt/Konstr.).)
- Zählprobleme (Wieviele Hamiltonkreise enthält  $G$ ?)
- $\vdots$

BEMERKUNG: Die nachfolgenden komplexitätstheoretischen Definitionen beziehen sich zunächst ausschließlich auf Entscheidungsprobleme. Da (fast) jedem der anderen Probleme aber ein Entscheidungsproblem zugeordnet werden kann (etwa: “Gibt es eine TSP-Tour in  $G$  die kürzer als  $\lambda$  ist?”), können die meisten Begriffe übertragen werden.

### **Formaler Aufbau von Entscheidungsproblemen:**

Das übliche Format eines Entscheidungsproblems besteht aus zwei Teilen: Der erste beschreibt die zugelassenen Eingabedaten (Input), der zweite ist eine Ja-/Nein-Frage, die sich auf die Eingabedaten bezieht.

### **Beispiel** (TSP - Entscheidungsvariante):

INPUT: Gewichteter Digraph  $G = (V, E, c)$ , Schranke  $\lambda \geq 0$ .

FRAGE: Existiert ein Hamiltonkreis in  $G$  dessen Länge höchstens  $\lambda$  ist?

BEMERKUNG: Ein Algorithmus hierfür könnte mittels binärer Suche auch zur Optimierung verwendet werden. Die dazu notwendige erste obere Schranke erhält man z.B. durch Summation aller Kantengewichte des Graphen.

### **Was ist ein Algorithmus:**

Lexikon: "Eine präzise Sequenz von Anweisungen, die jede Instanz eines klar definierten Problems löst."

Für eine exakte mathematische Definition des Begriffes wird zunächst ein konkretes Rechnermodell benötigt (wie z.B. die Turing Maschine [7] oder die Random Access Maschine (RAM) [21]).

Es hat sich herausgestellt, dass alle "vernünftigen" Rechnermodelle in dem Sinne äquivalent sind, dass jedes Modell in polynomial vielen Schritten auf einem anderen simuliert werden kann.

Wir können uns daher einen solchen theoretischen Rechner in etwa wie einen echten Computer vorstellen und Pseudo-Code (Pidgin Pascal) zur Notation der Algorithmen und zur Auswertung der Laufzeiten verwenden.

### **Effizienz:**

Es gibt verschiedene Kriterien für die "Güte" von Algorithmen (Laufzeit, Speicherplatzbedarf, ...) und dabei kann vom ungünstigsten Fall ausgegangen werden (*worst-case Analyse*) oder bei einer gegebenen Input-Verteilung vom Erwartungswert über alle möglichen Inputs (*average-case Analyse*). Die nachfolgenden Betrachtungen beschränken sich zumeist auf die worst-case Laufzeiten von Algorithmen.

Wir sprechen von einem *effizienten* Algorithmus, wenn seine worst-case Laufzeit polynomial in der Größe des Inputs beschränkt ist.

BEMERKUNG: Unter geringfügigen Verteilungsannahmen benötigt der Simplex-Algorithmus nur polynomial viele Schritte, im worst-case jedoch (für

alle bekannten Pivot-Regeln) exponentiell viele.

### Kodierungslänge des Inputs:

Was heißt nun “polynomial in der Größe des Inputs”? Die formale Definition der Input-Größe (size) benötigt wieder ein konkretes Rechnermodell, eine zulässige Sprache (etwa  $\mathcal{L} \subset \mathcal{POT}\{\{0, 1, \dots, [, ], (, ), \dots\}^*\}$ ) und ein Kodierungsschema (Übersetzung in die Sprache).

Aufgrund des schon zuvor besprochenen Hinweises zum Umgang mit algorithmischen Problemen benutzen wir im Allgemeinen eine von den obigen Spezifikationen unabhängige size-Funktion. Dabei gehen die Dimensionen direkt ein, Zahlwerte aber nur logarithmisch entsprechend ihrer binären Kodierungslänge. Ist  $I$  z.B. eine TSP-Instanz, so setzt man  $\text{size}(I) = |V| + |E| + \lceil \log(\lambda) \rceil + \max\{\lceil \log(c_e) \rceil : e \in E\}$ .

Ein Algorithmus ist demnach polynomial in der Größe des Inputs beschränkt, wenn seine Laufzeit  $O(p(\text{size}(I)))$  für ein Polynom  $p$  ist.

### Wieso polynomial = effizient?

Zunächst einmal ist die Eigenschaft “polynomial” zu sein in sich abgeschlossen, d.h. jegliche Art von Kombinationen polynomialer Algorithmen ergeben wieder einen polynomialen Algorithmus.

Den entscheidenden Grund erkennt man aber mit Hilfe der folgenden Tabellen:

Time complexity function	Size $n$					
	10	20	30	40	50	60
$n$	.00001 second	.00002 second	.00003 second	.00004 second	.00005 second	.00006 second
$n^2$	.0001 second	.0004 second	.0009 second	.0016 second	.0025 second	.0036 second
$n^3$	.001 second	.008 second	.027 second	.064 second	.125 second	.216 second
$n^5$	.1 second	3.2 seconds	24.3 seconds	1.7 minutes	5.2 minutes	13.0 minutes
$2^n$	.001 second	1.0 second	17.9 minutes	12.7 days	35.7 years	366 centuries
$3^n$	.059 second	58 minutes	6.5 years	3855 centuries	$2 \times 10^8$ centuries	$1.3 \times 10^{13}$ centuries

Size of Largest Problem Instance  
Solvable in 1 Hour

Time complexity function	With present computer	With computer 100 times faster	With computer 1000 times faster
$n$	$N_1$	$100 N_1$	$1000 N_1$
$n^2$	$N_2$	$10 N_2$	$31.6 N_2$
$n^3$	$N_3$	$4.64 N_3$	$10 N_3$
$n^5$	$N_4$	$2.5 N_4$	$3.98 N_4$
$2^n$	$N_5$	$N_5 + 6.64$	$N_5 + 9.97$
$3^n$	$N_6$	$N_6 + 4.19$	$N_6 + 6.29$

## 2.1 Definition

a) Ein Entscheidungsproblem  $\Pi$  liegt in der Klasse  $\mathbb{P}$  ((deterministisch) polynomiale Zeit), falls ein polynomialer Algorithmus  $\mathcal{A}$  existiert, der für jeden Input  $X$  einen Wert  $t(X)$  berechnet, so dass gilt:

(i) Ist  $X$  eine NEIN-Aufgabe, dann gilt  $t(X) = 0$ .

(ii) Ist  $X$  eine JA-Aufgabe, dann gilt  $t(X) = 1$ .

b) Ein Entscheidungsproblem  $\Pi$  liegt in der Klasse  $\text{NP}$  (nicht-deterministisch polynomiale Zeit), falls ein Polynom  $p$  und ein polynomialer Algorithmus  $\mathcal{A}$  existiert, der für jeden Input  $X$  und jedes mögliche Zertifikat  $Y$  der Länge höchstens  $p(\text{size}(X))$  einen Wert  $t(X, Y)$  berechnet, so dass gilt:

(i) Ist  $X$  eine NEIN-Aufgabe, dann gilt  $t(X, Y) = 0$ , für alle möglichen  $Y$ .

(ii) Ist  $X$  eine JA-Aufgabe, dann gilt  $t(X, Y) = 1$ , für mindestens ein Zertifikat  $Y$ .

BEMERKUNG: Es gilt  $\mathbb{P} \subset \text{NP}$ .

### Interpretationen des Zertifikats:

a) Das Zertifikat wird während der Ausführung des Algorithmus “geraten” (daher die Bezeichnung “nicht-deterministisch”). Wird das richtige Zertifikat geraten, so findet der Algorithmus den richtigen Lösungsweg im Berechnungsraum.

b) Angenommen es ist bekannt, dass  $X$  eine Ja-Aufgabe ist (“vom Himmel gefallen”, Orakel). Dann kann das Zertifikat als Beweis der Richtigkeit

der Lösung verstanden werden, d.h. dem Algorithmus wird das passende Zertifikat mitgegeben, sodass dieser die Richtigkeit durch auffinden der "1" bestätigen kann.

**Beispiel:** Die Entscheidungsvariante des TSPs liegt in  $\text{NP}$ . Dazu "rät" der Algorithmus einfach die Kanten einer TSP-Tour und berechnet dann die Länge dieser Tour. Wann immer eine Tour existiert die kurz genug ist, kann diese geraten werden ( $\exists Y : t(X, Y) = 1!$ ).

*Alternativ:* Ein Orakel gibt uns eine genügend kurze Tour an. Dann können wir offensichtlich in polynomialer Zeit prüfen, dass das stimmt. Die Tour selber ist hier also das Zertifikat.

### Also $\Pi$ schwer, falls $\Pi \notin \mathbb{P}$ ?

Nach den Vorüberlegungen würde man gerne für jedes Problem  $\Pi$  entscheiden, ob  $\Pi \in \mathbb{P}$  oder  $\Pi \notin \mathbb{P}$  gilt und falls letzteres der Fall ist  $\Pi$  als schwer bezeichnen. Leider ist es noch für kein Problem in  $\text{NP}$  gelungen zu zeigen, dass  $\Pi \notin \mathbb{P}$  ist. Die Beantwortung der Frage, ob  $\mathbb{P} \neq \text{NP}$  gehört vielmehr zu den wichtigsten offenen Problemen der Mathematik, auf deren Lösung ein Preisgeld von eine Million Dollar ausgesetzt ist.

### Was tun?

Der Ausweg aus der Misere gelingt dadurch, dass wir ein Problem  $\Pi$  als "schwer" bezeichnen, falls es "nicht leichter" ist als alle Probleme aus  $\text{NP}$ . Um das zu konkretisieren brauchen wir zunächst noch den Begriff der polynomialen Transformation.

### 2.2 Definition

a) *Ein Entscheidungsproblem  $\Pi_1$  ist polynomial transformierbar auf ein Entscheidungsproblem  $\Pi_2$ , falls für einen beliebigen Input  $X_1$  für  $\Pi_1$  in polynomialer Zeit (in  $\text{size}(X_1)$ ) ein Input  $X_2$  für  $\Pi_2$  konstruiert werden kann, sodass gilt:  $X_1$  ist eine Ja-Aufgabe für  $\Pi_1$ , genau dann wenn  $X_2$  ist eine Ja-Aufgabe für  $\Pi_2$ .*

BEMERKUNG: Man beachte die Transitivität der Begriffe und die Ausnutzung der Abgeschlossenheit der Polynomfunktionen.

b) *Ein Entscheidungsproblem  $\Pi$  heißt  $\text{NP}$ -schwer, falls alle Entscheidungsprobleme aus  $\text{NP}$  polynomial auf  $\Pi$  transformiert werden können.  $\Pi$  heißt  $\text{NP}$ -vollständig, falls zusätzlich  $\Pi \in \text{NP}$  gilt.*

BEMERKUNG: Da  $\mathbb{P} \neq \text{NP}$  nicht bekannt ist, können wir nicht sagen, ob es Probleme in  $\text{NP}$  gibt, die nicht polynomial lösbar sind, aber

- (i) kein NP-schweres Problem kann durch einen bekannten polynomialen Algorithmus gelöst werden und
- (ii) falls jemals ein polynomialer Algorithmus für ein NP-schweres Problem gefunden wird, so erhält man automatisch polynomiale Algorithmen für alle Probleme in NP.

### 2.3 Definition

- a) Eine boolesche Variable ist eine Variable  $s$  die nur die Werte 'wahr' oder 'falsch' annehmen kann. Ist  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  eine Menge boolescher Variablen, dann heißt  $w : S \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$  eine Wahrheitsbelegung der Variablen. Ist  $w(s) = \text{wahr}$ , so sagt man  $s$  ist wahr, ist  $w(s) = \text{falsch}$ , so sagt man  $s$  ist falsch.
- b) Jeder booleschen Variablen  $s$  werden zwei Literale zugeordnet:  $s$  und  $\bar{s}$ , wobei das Literal  $s$  wahr ist, wenn die Variable  $s$  wahr ist und das Literal  $\bar{s}$  wahr ist, wenn die Variable  $s$  falsch ist. Es gilt  $\bar{\bar{s}} = s$ .
- c) Eine Klausel  $C$  über  $S$  ist eine Menge von Literalen über  $S$  (etwa  $C = \{s_1, \bar{s}_2, s_4\}$ ). Eine Klausel ist wahr, wenn mindestens ein Literal der Klausel wahr ist.
- d) Das folgende Entscheidungsproblem heißt SATISFIABILITY oder kurz SAT:

INPUT: Eine Menge von  $m$  Klauseln  $\mathcal{C}$  über  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ .

FRAGE: Existiert eine Wahrheitsbelegung, sodass alle Klauseln  $C \in \mathcal{C}$  wahr werden?

Eine Instanz  $I$  von SAT kürzen wir mit  $(n, m, S, \mathcal{C})$  ab.

Gilt  $|C| = k$  für alle  $C \in \mathcal{C}$ , so spricht man von  $k$ -SAT.

#### Beispiel:

Ist  $C_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$  und  $C_2 = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3\}$  dann ist  $w : \{s_1, s_2, s_3\} \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$  eine erfüllende Wahrheitsbelegung, genau dann wenn  $(w(s_1), w(s_2), w(s_3))$  mindestens ein 'wahr' und ein 'falsch' enthält.

### 2.4 Satz (Cook)

SATISFIABILITY ist NP-vollständig.

BEMERKUNG: Zum Beweis des Satzes wird die sogenannte nicht-deterministische Turing-Maschine benötigt und alle ihre Möglichkeiten in einer SAT-Instanz abgebildet. Wäre nun SATISFIABILITY in  $\mathbb{P}$ , so könnte alles was die

nicht-deterministische Turing-Maschine in polynomialer Zeit bearbeiten kann auch auf einer (deterministischen) Turing-Maschine bearbeitet werden – es wäre also  $\mathbb{P} = \text{NP}$ .

### Wie zeigt man, dass ein neues Problem NP-schwer ist?

Zum Beweis der NP-Schwere eines neuen Problems  $\Pi_1$  genügt es aufgrund der Transitivität der polynomialen Transformierbarkeit zu zeigen, dass es ein NP-schweres Problem  $\Pi_2$  gibt, welches polynomial auf  $\Pi_1$  transformierbar ist. Die Existenz zumindest eines solchen  $\Pi_2$  ist durch Satz 2.4 gesichert.

## 3 Einige NP-vollständige Probleme

### 3.1 Satz

a) Für  $k \leq 2$  ist  $k$ -SAT in  $\mathbb{P}$ .

b) Für  $k \geq 3$  ist  $k$ -SAT NP-vollständig.

BEWEIS:

a)  $k = 1$  ist trivial,  $k = 2$  siehe Übung.

b) Offensichtlich liegt  $k$ -SAT in NP. Wir zeigen zunächst, dass es genügt die NP-Vollständigkeit von 3-SAT zu zeigen. Sei dazu  $C = \{c_1, \dots, c_j\}$  eine Klausel über  $S$  und  $t \notin S$  eine neue Variable. Dann ist  $C$  erfüllbar, genau dann wenn  $\{c_1, \dots, c_j, t\}$  und  $\{c_1, \dots, c_j, \bar{t}\}$  erfüllbar sind. Somit können wir ausgehend von der Schwere von 3-SAT induktiv die Schwere von  $k$ -SAT für beliebige  $k \geq 3$  zeigen.

Sei nun  $(n, m, S, \mathcal{C})$  eine SAT -Instanz. Wir konstruieren eine äquivalente Instanz von 3-SAT . Sei dazu  $C = \{c_1, \dots, c_j\} \in \mathcal{C}$ . O.E. kann  $j \geq 2$  angenommen werden. Ist  $j = 2$ , so kann  $C$  wie oben durch 2 Klauseln ersetzt werden, die beide aus 3 Literalen bestehen. Sei also  $j > 3$ ,  $t \notin S$ ,  $C_1 = \{c_1, c_2, t\}$  und  $C_2 = \{\bar{t}, c_3, \dots, c_j\}$ . Dann ist  $C$  genau dann erfüllbar, wenn  $C_1$  und  $C_2$  erfüllbar sind,  $C_1$  enthält 3 Literale und  $C_2$  ein Literal weniger als  $C$ . Durch Iteration entsteht so eine äquivalente 3-SAT Instanz. Für jede ursprüngliche Klausel mit 2 Literalen werden eine neue Variable und eine neue Klausel benötigt. Je Klausel mit  $j \geq 3$  Literalen werden  $j - 3$  neue Variablen und Klauseln benötigt. Insgesamt ist die Zahl der neuen Variablen und Klauseln in jedem Fall jeweils durch  $nm$  beschränkt.

□

### 3.2 Definition

a) Sei  $C = \{c_1, \dots, c_j\}$  eine Klausel über  $S$ , dann ist  $\bar{C} := \{\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_j\}$ .  
(Beachte:  $C$  und  $\bar{C}$  wahr  $\Leftrightarrow$  nicht alle  $c_i$  haben den gleichen Wert.)

Ist  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$  eine Menge von Klauseln über  $S$ , dann ist  $\bar{\mathcal{C}} := \{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m\}$ .

b) Das folgende Entscheidungsproblem heißt NOT-ALL-EQUAL- $k$ -SAT (NAE- $k$ -SAT):

INPUT: Wie bei  $k$ -SAT .

FRAGE: Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für  $\mathcal{C} \cup \bar{\mathcal{C}}$ ?

c) Das folgende Entscheidungsproblem heißt 3-SPLIT:

INPUT: Eine endliche Menge  $M$  und eine Familie  $\mathcal{M}$  von Teilmengen von  $M$ , wobei die Mengen in  $\mathcal{M}$  alle 2 oder 3 Elemente enthalten.

FRAGE: Lässt sich  $M$  in zwei Teilmengen aufteilen, sodass beide jedes Element von  $\mathcal{M}$  schneiden?

#### Beispiel:

Ist  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $\mathcal{M} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3\}\}$ , dann ist  $\{1, 2\} \cup \{3, 4\}$  eine erfüllende Partition von  $M$ .

d) Das folgende Entscheidungsproblem heißt PARTITION:

INPUT: Positive ganze Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

FRAGE: Existiert eine Partition  $I, I^c$  von  $\{1, \dots, n\}$ , sodass  
$$\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{i \in I^c} \alpha_i$$
?

**Beispiel:** Sei  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (1, 2, 6, 7, 9, 9, 10)$ , dann ist  $I = \{1, 2, 6, 7\}$  eine Lösung, denn  $1 + 2 + 9 + 10 = 6 + 7 + 9$ .

### 3.3 Satz

a) NAE-6-SAT ist NP-vollständig.

b) NAE-3-SAT ist NP-vollständig.

BEWEIS: Zunächst liegen beide Probleme offensichtlich in NP. Der Beweis der NP-Schwere erfolgt durch Transformation von 3-SAT. Sei  $I = (n, m, S, \mathcal{C})$  eine Instanz von 3-SAT mit  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ .

- a) Wir konstruieren eine äquivalente Instanz  $I' = (n', m', S', \mathcal{C}')$  von NAE-6-SAT. Sei dazu zunächst  $S' = \{s'_1, s''_1, \dots, s'_n, s''_n\}$ . Die Idee der Transformation ist, dass  $s_i$  wahr ist, genau dann wenn  $w(s'_i) \neq w(s''_i)$ . Für  $C = \{c_1, c_2, c_3\} \in \mathcal{C}$  sei dazu  $C_i = \{c'_i, c''_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  und  $C^1 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ ,  $C^2 = C_1 \cup C_2 \cup \bar{C}_3$ ,  $C^3 = C_1 \cup \bar{C}_2 \cup C_3, \dots, C^8 = \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2 \cup \bar{C}_3$ . Es folgt, dass  $C^1, \dots, C^8$  erfüllt sind, genau dann wenn zumindest ein Paar  $C_i, \bar{C}_i$  erfüllt ist, also genau dann wenn  $w(c'_i) = w(c''_i)$  für mindestens ein  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Ferner ist bei dieser Konstruktion automatisch  $\mathcal{C}' = \bar{\mathcal{C}}'$ , d.h. es handelt sich wirklich um eine NAE-6-SAT Instanz. Da  $n' = 2n$  und  $m' = 8m$  haben wir unsere polynomiale Transformation.
- b) Sei nun  $\tilde{C} = \{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2\}$  eine der oben konstruierten NAE-6-SAT Klauseln. Dann kann diese durch die Klauseln  $\tilde{C}_1 = \{x_1, x_2, w_1\}$ ,  $\tilde{C}_2 = \{y_1, y_2, w_2\}$ ,  $\tilde{C}_3 = \{z_1, z_2, w_3\}$  und  $\tilde{C}_4 = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$  ersetzt werden, wodurch man eine äquivalente Instanz von NAE-3-SAT erhält. Insgesamt besteht die Instanz nun aus  $2n + 24m$  Variablen und  $32m$  Klauseln.

□

### 3.4 Satz

3-SPLIT ist NP-vollständig.

BEWEIS: 3-SPLIT liegt natürlich in NP. Die Schwere folgt aus einer Transformation von NAE-3-SAT. Sei dazu  $(n, m, S, \mathcal{C})$  eine NAE-3-SAT Instanz,  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ . O.E. kann angenommen werden, dass in jeder Klausel 3 verschiedene Variablen vorkommen. Setze  $M = \{\pm 1, \dots, \pm n\}$  und für  $C \in \mathcal{C}$  bestehend aus Variablen  $s_i, s_j, s_k$  sei  $\{\delta_i i, \delta_j j, \delta_k k\} \in \mathcal{M}$ , wobei  $\delta_l = 1$ , falls  $s_l \in C$  und  $\delta_l = -1$ , falls  $\bar{s}_l \in C$  (ist also etwa  $C = \{s_1, \bar{s}_2, s_3\}$ , dann ist  $\{1, -2, 3\} \in \mathcal{M}$ ). Außerdem enthält  $\mathcal{M}$  die Mengen  $\{-i, i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Angenommen  $\mathcal{C}$  ist erfüllt. Setze  $M_1 = \{i \in M : s_i = \text{wahr}\} \cup \{-i \in M : s_i = \text{falsch}\}$  und  $M_2 = \{i \in M : s_i = \text{falsch}\} \cup \{-i \in M : s_i = \text{wahr}\}$ . Dann ist  $M_1, M_2$  eine Partition von  $M$  und offensichtlich schneiden beide alle zweier Mengen von  $\mathcal{M}$ . Sie schneiden ebenfalls alle dreier Mengen, da sonst in einer Klausel alle Literale wahr oder alle falsch wären. Wir erhalten also eine Ja-Instanz von 3-SPLIT.

Ist umgekehrt  $M_1, M_2$  eine Partition von  $M$ , sodass beide alle Mengen in  $\mathcal{M}$  schneiden, dann setze  $s_i = \text{wahr}$ , falls  $i \in M_1$  und  $s_i = \text{falsch}$ , falls  $i \in M_2$ . Dies ergibt eine erfüllende Wahrheitbelegung für  $\mathcal{C}$ . Die beiden Instanzen sind also äquivalent und die Transformation geht in polynomialer Zeit. □

### 3.5 Satz

PARTITION ist NP-vollständig.

BEWEIS: siehe [7].

□

## 4 Norm-Maximierung

Sei  $p \in \mathbb{N}$  fest.

### 4.1 Lemma

Sei  $P \subset \mathbb{R}^d$  ein Polytop und  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Dann existiert eine Ecke  $v$  von  $P$ , sodass  $\sup\{\varphi(x) : x \in P\} = \varphi(v)$ .

BEWEIS: Folgt aus Bemerkung 2.4.25 Optimierung 1.  $\square$

BEMERKUNG: Aufgrund von Lemma 4.1 ist die Maximierung konvexer Funktionale über  $\mathcal{V}$ -Polytopen offensichtlich effizient durchführbar. Im Folgenden werden wir sehen, dass dies für  $\mathcal{H}$ -Polytope i.a. nicht der Fall ist.

Hierzu betrachten wir die  $l_p$ -Normen als konvexes Funktional und suchen nach einer möglichst speziellen Klasse von  $\mathcal{H}$ -Polytopen (nämlich spezielle volldimensionale Parallelotope), für die die Bestimmung des Normmaximums bereits NP-vollständig ist, da dies die Weiterverwendung des Resultats am einfachsten Gestaltet.

Schwere-Aussagen zur Maximierung allgemeinerer konvexer Funktionale findet man u.a. in [3].

Zunächst folgen noch zwei positive Resultate, die zeigen, dass die nachfolgenden negativen Resultate in gewissem Sinne bestmöglich sind.

### 4.2 Satz

Sei  $(\mathbb{M}^d, d \in \mathbb{N})$  eine Folge  $d$ -dimensionaler Minkowski-Räume mit  $\mathcal{H}$ -polytopalen Einheitskugeln  $\mathbb{B}^d$ , deren Kodierungslänge durch ein Polynom in  $d$  beschränkt ist (etwa  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_\infty^d$ , und nicht  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_1^d$ ). Dann kann das Problem der Normmaximierung über  $\mathcal{H}$ -Polytopen  $P$  in polynomialer Zeit gelöst werden.

BEWEIS: Sei  $P = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^d : \langle u_i, x \rangle \leq \alpha_i\}$  und  $\mathbb{B}^d = \bigcap_{j=1}^k \{x \in \mathbb{R}^d : \langle y_j, x \rangle \leq 1\}$ . Dann gilt  $\max_{x \in P} \|x\| = \max_{j \in \{1, \dots, k\}} \max_{x \in P} \langle y_j, x \rangle$ , d.h. zur Bestimmung des Normmaximums müssen nur  $k$  LPs gelöst und deren Maxima miteinander verglichen werden. Ist die Kodierungslänge der Einheitskugel polynomial in  $d$  ist daher der ganze Algorithmus polynomial.  $\square$

BEMERKUNG: Die Kodierungslänge der Einheitskugel muss tatsächlich polynomial in  $d$  sein, da  $d$  die einzige mit  $\mathbb{B}^d$  bekannte Inputgröße ist.

### 4.3 Lemma

Sei  $P \subset \mathbb{R}^d$  ein Parallelotop mit der  $\mathcal{S}$ -Darstellung  $P = \sum_{i=1}^d [-1, 1]z^i$  bzw. der  $\mathcal{H}$ -Darstellung  $P = \bigcap_{i=1}^d \{x \in \mathbb{R}^d : |\langle u^i, x \rangle| \leq 1\}$ , wobei  $u^1, \dots, u^d$  und

$z^1, \dots, z^d \in \mathbb{R}^d$ . Dann gibt es einen polynomialen Algorithmus der jeweils die eine Darstellung in die andere überführt.

BEWEIS: siehe Übungen. □

BEMERKUNG: Es genügt also die nachfolgenden Polynomialitäts- und Schwere-Aussagen für Parallelotope in  $\mathcal{S}$ -Darstellung herzuleiten. Die entsprechende Aussage für  $\mathcal{H}$ -Parallelotope folgt dann aufgrund von Lemma 4.3. Eine Aussage wie Lemma 4.3 für allgemeine Zonotope gibt es nicht.

#### 4.4 Satz

In  $\mathbb{R}_2^d$  kann das Normmaximum über  $\mathcal{S}$ -Boxen in polynomialer Zeit bestimmt werden.

BEWEIS: siehe Übungen. □

BEMERKUNG: Der analoge Fall für  $p \neq 2$  oder  $\mathcal{V}$ -polytopale Einheitskugeln ist offen.

Es folgen drei Lemmas zur Vorbereitung des eigentlich gewünschten Schwere-Resultats. Im ersten wird zunächst gezeigt dass die Normmaximierung über sehr spezielle unterdimensionale Parallelotope NP-vollständig ist.

#### 4.5 Lemma

Das folgende Problem  $\text{PAR}\{-1, 0, 1\}\text{MAX}_p$  ist NP-vollständig:

INPUT:  $d, m \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq d$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$  und  $x^1, \dots, x^m \in \{-1, 0, 1\}^d$  l.u. .

FRAGE: Existieren  $\kappa_1, \dots, \kappa_m \in \{-1, 1\}$ , sodass  $\|\sum_{i=1}^m \kappa_i x^i\|_p^p \geq \alpha$ ?

BEMERKUNG: Beachte, dass  $p \neq \infty$  wegen Satz 4.2 in Lemma 4.5 angenommen sein muss.

BEWEIS: Die Zugehörigkeit zu NP ist offensichtlich (rate  $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ ). Der Beweis der NP-Schwere erfolgt durch Transformation von 3-Split.

Sei  $(m, r + s, M, \mathcal{M})$  eine Instanz von 3-Split,  $M = \{1, \dots, m\}$  und  $\mathcal{M} = \{L_1, \dots, L_{r+s}\}$ , wobei  $|L_k| = 3$  für  $k \leq r$  und  $|L_k| = 2$  für  $k \geq r + 1$ . Setze  $d = 3r + s + m$ .

**Beispiel:** Sei  $m = 5, r = 2, s = 2, M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  und  $\mathcal{M} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}\}$ . Dann ist  $d = 13$ .

Die Idee der Transformation ist die Konstruktion von Vektoren  $x^1, \dots, x^m \in \{-1, 0, 1\}^d$ , einer für jedes Element von  $M$ , sodass für jede Partition von  $M$  in zwei Mengen  $I_1$  und  $I_2$  folgt:

$$\left\| 1 \cdot \sum_{i \in I_1} x^i + (-1) \cdot \sum_{i \in I_2} x^i \right\|_p^p \geq (3^p + 2)r + 2^p s + m =: \alpha$$

$$\Leftrightarrow I_l \cap L_k \neq \emptyset, \quad l = 1, 2, \quad k = 1, \dots, r + s.$$

Dazu werden die Vektoren  $x^i \in \mathbb{R}^{3r+s+m}$  in Blöcke angeordnet: Die ersten  $r$  Blöcke der Länge 3 sind den Mengen  $L_1, \dots, L_r$  zugeordnet, die folgenden  $s$  Blöcke der Länge 1 den Mengen  $L_{r+1}, \dots, L_{r+s}$ . Der finale Block der Länge  $m$  enthält den  $i$ -ten Standardbasisvektor (damit die Vektoren linear unabhängig sind). Genauer:

Für  $1 \leq k \leq r$  sei

$$x_{3k-2}^i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \notin L_k, \\ -1, & \text{falls } i \text{ kleinstes Element in } L_k, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$x_{3k-1}^i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \notin L_k, \\ -1, & \text{falls } i \text{ mittleres Element in } L_k, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$x_{3k}^i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \notin L_k, \\ -1, & \text{falls } i \text{ größtes Element in } L_k, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $r + 1 \leq k \leq r + s$

$$x_{2r+k}^i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \notin L_k, \\ -1, & \text{falls } i \text{ kleineres Element in } L_k, \\ 1, & \text{falls } i \text{ größeres Element in } L_k. \end{cases}$$

und für  $1 \leq k \leq m$

$$x_{3r+s+k}^i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Beispiel (Fortsetzung):**

$$\begin{array}{rcccccc}
 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\
 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 L_1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 \hline
 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
 L_2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
 \hline
 L_3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 L_4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Seien nun  $\kappa_1, \dots, \kappa_m \in \{-1, 1\}$  und  $x = \sum_{i=1}^m \kappa_i x^i$ . Für  $1 \leq k \leq r$  und  $L_k = \{a, b, c\}$  mit  $a < b < c$  ist

$$\begin{pmatrix} x_{3k-2} \\ x_{3k-1} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = \kappa_a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \kappa_b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \kappa_c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$|x_{3k-2}|^p + |x_{3k-1}|^p + |x_{3k}|^p = \begin{cases} 3, & \text{falls } \kappa_a = \kappa_b = \kappa_c \\ 3^p + 2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $r+1 \leq k \leq r+s$  und  $L_k = \{d, e\}$  mit  $d < e$  gilt  $x_{2r+k} = \kappa_d \cdot (-1) + \kappa_e \cdot (+1)$  und es folgt

$$|x_{2r+k}|^p = \begin{cases} 0, & \text{falls } \kappa_d = \kappa_e \\ 2^p, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insgesamt folgt die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i)  $\|x\|_p^p \geq (3^p + 2)r + 2^p s + m$ .
- (ii) Für alle 3-elementigen Mengen  $\{a, b, c\} \in \mathcal{M}$  ist *nicht*  $\kappa_a = \kappa_b = \kappa_c$  und für alle 2-elementigen Mengen  $\{d, e\} \in \mathcal{M}$  ist  $\kappa_d \neq \kappa_e$ .
- (iii) Jedes  $L \in \mathcal{M}$  schneidet die Mengen  $I_1 = \{i : \kappa_i = 1\}$  und  $I_2 = \{i : \kappa_i = -1\}$ .

Dies zeigt auch die Äquivalenz der Instanzen.  $\square$

Im zweiten Schritt werden nun kleine Einheitswürfel addiert um Volldimensionalität zu erreichen. Dadurch geht zunächst die lineare Unabhängigkeit der erzeugenden Vektoren verloren. Wir erhalten also erstmal nur eine Aussage über (spezielle)  $\mathcal{S}$ -Zonotope.

#### 4.6 Lemma

Das folgende Problem  $[-1, 1]\text{ZONMAX}_p$  ist  $\text{NP}$ -vollständig:

INPUT:  $d, n \in \mathbb{N}$  mit  $d \leq n$ ,  $\beta \in \mathbb{N}$  und  $y^1, \dots, y^n \in \mathbb{R}^d$ , wobei  $y^1, \dots, y^d$  die Standardbasisvektoren sind und  $y^{d+1}, \dots, y^n \in \{-(d+1), 0, d+1\}^d$ .

FRAGE: Existieren  $\kappa_1, \dots, \kappa_n \in \{-1, 1\}$ , sodass  $\|\sum_{i=1}^n \kappa_i y^i\|_p^p \geq \beta$  ?

BEWEIS: Natürlich liegt  $[-1, 1]\text{ZONMAX}_p$  in  $\text{NP}$ . Wir zeigen die Schwere durch Transformation von  $\text{PAR}\{-1, 0, 1\}\text{MAX}_p$ . Sei dazu  $(d, m; \alpha, x^1, \dots, x^m)$  eine Instanz von  $\text{PAR}\{-1, 0, 1\}\text{MAX}_p$ . Setze  $n = d + m$ ,  $\beta = (d+1)^p \alpha$  und  $y^i = (d+1)x^{i-d}$ ,  $i = d+1, \dots, n$ . Wir zeigen die Äquivalenz der beiden Instanzen:

Ist  $(d, m; \alpha, x^1, \dots, x^m)$  eine Ja-Instanz von  $\text{PAR}\{-1, 0, 1\}\text{MAX}_p$ , so existieren  $\kappa_{d+1}, \dots, \kappa_n \in \{-1, 1\}$ , sodass

$$\left\| \sum_{i=1}^m \kappa_{d+i} x^i \right\|_p^p \geq \alpha, \text{ also } \left\| \sum_{i=d+1}^n \kappa_i y^i \right\|_p^p \geq (d+1)^p \alpha = \beta.$$

Da  $\|\cdot\|_p^p$  konvex ist und  $\sum_{i=d+1}^n \kappa_i y^i$  Mittelpunkt der  $2^d$  Punkte der Form

$$\sum_{i=1}^d \{-1, 1\} y^i + \sum_{i=d+1}^n \kappa_i y^i,$$

gibt es mindestens einen Punkt  $y$  dieser Form mit  $\|y\|_p^p \geq \beta$ . Folglich ist  $(d, n; \beta, y^1, \dots, y^n)$  Ja-Instanz von  $[-1, 1]\text{ZONMAX}_p$ .

Ist nun  $(d, m; \alpha, x^1, \dots, x^m)$  eine Nein-Instanz von  $\text{PAR}\{-1, 0, 1\}\text{MAX}_p$ , so gilt  $\left\| \sum_{i=1}^m \kappa_{d+i} x^i \right\|_p^p \leq \alpha - 1$  für jede Wahl von  $\kappa_{d+1}, \dots, \kappa_n$ . Also folgt

$$\left\| \sum_{i=1}^n \kappa_i y^i \right\|_p^p \leq d^p + (d+1)^p(\alpha - 1) = \beta + d^p - (d+1)^p < \beta$$

für alle möglichen  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ . Folglich ist  $(d, n; \beta, y^1, \dots, y^n)$  Nein-Instanz von  $[-1, 1]\text{ZONMAX}_p$ .  $\square$

#### 4.7 Lemma

Seien  $d, n, \tau \in \mathbb{N}$  mit  $d < n$ ,  $e^1, \dots, e^n$  die Standardbasisvektoren des  $\mathbb{R}^n$  und der  $\mathbb{R}^d$  kanonisch in den  $\mathbb{R}^n$  eingebettet.  $\delta, \varepsilon, \nu$  seien positive Zahlen mit

$$\nu = \varepsilon(n-d)^{\frac{1}{p}} \leq \min \left\{ 2^{\frac{1}{p}} - 2^{\frac{1}{2p}}, \frac{\delta}{2p(n\tau)^{p-1}} \right\}.$$

Weiter seien  $y^i = z^i = e^i$  für  $i = 1, \dots, d$ ,  $y^{d+1}, \dots, y^n$  Vektoren des  $\mathbb{R}^d$ , jeweils von  $p$ -Norm höchstens  $\tau$  und  $z^i = y^i + \varepsilon e^i$ ,  $i = d+1, \dots, n$ . Schließlich bezeichne  $\mu(Y)$  bzw.  $\mu(Z_\varepsilon)$  das Maximum von  $\|\cdot\|_p^p$  über den Zonotopen

$$Y = \sum_{i=1}^n [-1, 1] y^i \subset \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^n \text{ bzw. } Z_\varepsilon = \sum_{i=1}^n [-1, 1] z^i \subset \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt  $\mu(Y) \leq \mu(Z_\varepsilon)$  und für  $\mu(Y) \geq 2$  gilt  $\mu(Z_\varepsilon) \leq \mu(Y) + \delta$ .

BEWEIS: Die erste Ungleichung ist klar, da die  $p$ -Norm eines Punktes wächst, wenn eine Koordinate betragsmäßig wächst und alle anderen unverändert bleiben.

Zum Beweis der zweiten Ungleichung: Sei  $v$  eine Ecke von  $Z_\varepsilon$  mit  $\|v\|_p^p = \mu(Z_\varepsilon)$ . Dann existieren  $\kappa_1, \dots, \kappa_n \in \{-1, 1\}$ , sodass

$$v = \sum_{i=1}^n \kappa_i z^i = \sum_{i=1}^n \kappa_i y^i + \varepsilon \sum_{i=d+1}^n \kappa_i e^i.$$

Es gilt

$$\sigma := \left\| \sum_{i=1}^n \kappa_i y^i \right\|_p \leq \mu(Y)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^n \|y^i\|_p \leq n\tau \text{ und } \left\| \sum_{i=d+1}^n \kappa_i e^i \right\|_p = (n-d)^{\frac{1}{p}}.$$

Da  $y^i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, \dots, n$  folgt  $2 \leq \mu(Z_\varepsilon) = \|v\|_p^p = (\sigma + \nu)^p$ . Löst man nach  $\sigma$  auf und beachtet, dass  $\nu \leq 2^{\frac{1}{p}} - 2^{\frac{1}{2p}}$  vorausgesetzt war, dann erhält man

$\sigma \geq 2^{\frac{1}{p}} - \nu \geq 2^{\frac{1}{2p}}$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
(\sigma + \nu)^p &= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \sigma^{p-i} \nu^i \\
&\leq \sigma^p + p\sigma^{p-1}\nu + \sum_{i=2}^p \binom{p}{i} \sigma^{p-i} \nu (2^{\frac{1}{2p}} (2^{\frac{1}{2p}} - 1))^{i-1} \\
&\leq \sigma^p + p\sigma^{p-1}\nu + \sigma^{p-1}\nu \sum_{i=2}^p \binom{p}{i} (2^{\frac{1}{2p}} - 1)^{i-1} \\
&\leq \sigma^p + p\sigma^{p-1}\nu + p\sigma^{p-1}\nu \sum_{i=2}^p \binom{p-1}{i-1} (2^{\frac{1}{2p}} - 1)^{i-1} \\
&= \sigma^p + p\sigma^{p-1}\nu + p\sigma^{p-1}\nu \left( \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} (2^{\frac{1}{2p}} - 1)^i - 1 \right) \\
&= \sigma^p + p\sigma^{p-1}\nu + p\sigma^{p-1}\nu \left( ((2^{\frac{1}{2p}} - 1) + 1)^{p-1} - 1 \right) \\
&\leq \sigma^p + p\sigma^{p-1}\nu + p\sigma^{p-1}\nu (2^{\frac{1}{2}} - 1) \\
&\leq \sigma^p + 2p\sigma^{p-1}\nu .
\end{aligned}$$

Wegen  $\sigma^p \leq \mu(Y)$ ,  $\sigma \leq n\tau$  und  $\nu \leq \frac{\delta}{2p(n\tau)^{p-1}}$  gilt daher

$$\mu(Z_\varepsilon) = (\sigma + \nu)^p \leq \sigma^p + 2p\sigma^{p-1}\nu \leq \mu(Y) + \delta.$$

□

#### 4.8 Definition

a) Das Problem  $[-1, 1]\text{PARMAX}_p$  ist gegeben durch:

INPUT:  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma \in \mathbb{N}$  und  $x^1, \dots, x^d \in \mathbb{Z}^d$  (oder äquivalent  $\mathbb{Q}^d$ ).

FRAGE: Ist das Maximum von  $\|\cdot\|_p^p$  über dem Parallelotop  $\sum_{i=1}^d [-1, 1]x^i$  mindestens  $\gamma$ ?

b) Das Problem  $[0, 1]\text{PARMAX}_p$  ist gegeben durch:

INPUT:  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma \in \mathbb{N}$  und  $x^1, \dots, x^d \in \mathbb{Z}^d$  (oder äquivalent  $\mathbb{Q}^d$ ).

FRAGE: Ist das Maximum von  $\|\cdot\|_p^p$  über dem Parallelotop  $\sum_{i=1}^d [0, 1]x^i$  mindestens  $\gamma$ ?

#### 4.9 Satz

$[-1, 1]\text{PARMAX}_p$  und  $[0, 1]\text{PARMAX}_p$  sind NP-vollständig.

BEWEIS: Beide Probleme liegen in  $\mathbb{NP}$ . Wir zeigen nur die  $\mathbb{NP}$ -Vollständigkeit von  $[-1, 1]\text{PARMAX}_p$ . Die  $\mathbb{NP}$ -Vollständigkeit von  $[0, 1]\text{PARMAX}_p$  kann dann durch Transformation von  $[-1, 1]\text{PARMAX}_p$  gezeigt werden.

Sei  $(d, n; \beta, y^1, \dots, y^n)$  eine Instanz von  $[-1, 1]\text{ZONMAX}_p$ . Ist  $d = n$ , so liegt bereits eine Instanz von  $[-1, 1]\text{PARMAX}_p$  vor. Sei also  $d < n$  und  $\tau = (d + 1)^{\frac{p+1}{p}}$ . Dann gilt  $\tau > \max_{i=1, \dots, n} \|y^i\|_p$ , da jede Komponente von  $y^i$  durch  $d + 1$  betragsmäßig beschränkt ist. Setze weiter  $\delta = 1/2$  und wähle  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ , sodass

$$\varepsilon < \frac{1}{(n-d)^{1/p}} \min \left\{ 2^{\frac{1}{p}} - 2^{\frac{1}{2p}}, \frac{\delta}{2p(n\tau)^{p-1}} \right\}.$$

(Ein solches  $\varepsilon$  kann in polynomialer Zeit bestimmt werden, indem man die rechte Seite in geeigneter endlicher Präzision bestimmt.)

Nun seien  $z^1, \dots, z^n$  wie in Lemma 4.7. Dann ist  $(n, \beta; z^1, \dots, z^n)$  eine Instanz von  $[-1, 1]\text{PARMAX}_p$  und wegen Lemma 4.7 folgt, dass  $\mu(Y) \leq \mu(Z_\varepsilon) \leq \mu(Y) + 1/2$ . Da  $\mu(Y)$  und  $\beta$  ganzzahlig sind, gilt  $\mu(Y) \geq \beta \Leftrightarrow \mu(Z_\varepsilon) \geq \beta$ , woraus die Äquivalenz der Instanzen ersichtlich wird.  $\square$

#### 4.10 Satz

*Eine Approximation  $\gamma$  mit  $\gamma \leq \mu(P) \leq d^{\frac{1}{p}}\gamma$  des Maximums  $\mu(P)$  der  $l_p$ -Norm über einem  $\mathcal{H}$ -Polytop  $P$  kann in polynomialer Zeit berechnet werden.*

BEWEIS: Es ist bekannt (und leicht zu sehen), dass  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq d^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Sind daher  $v, w \in P$ , sodass  $\mu(P) = \|v\|_p$  und  $\gamma := \max_{x \in P} \|x\|_\infty = \|w\|_\infty$  dann gilt  $\gamma \leq \|w\|_p \leq \mu(P) \leq d^{\frac{1}{p}}\|w\|_\infty \leq d^{\frac{1}{p}}\gamma$  und  $w, \gamma$  können wegen Satz 4.2 in polynomialer Zeit bestimmt werden.  $\square$

BEMERKUNG:

- a) Man beachte, dass oftmals  $\|w\|_p$  eine deutlich bessere untere Schranke für  $\mu(P)$  liefert als  $\gamma$ .
- b) Die Fehlerschranke  $d^{\frac{1}{p}}$  kann durch Verwendung anderer polytopaler Normen verbessert werden. Insbesondere kann für  $p = 2$  der Approximationsfehler auf  $O(\sqrt{\frac{d}{\log(d)}})$  reduziert werden.
- c) Andererseits sind kaum noch bessere Resultate zu erwarten: Ist  $p \in [2, \infty)$  und  $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$ , so existiert z.B. kein polynomialer Algorithmus zur Berechnung des Normmaximums in  $l_p$ -Räumen mit konstanter Fehlerschranke [5].

## 5 Das allgemeine Containment Problem

Von Containment Problemen spricht man bei Aufgabenstellungen, deren Ziel die Bestimmung oder Approximation extremaler Körper einer gegebenen Klasse ist, welche in einem gegebenen weiteren Körper enthalten sind oder diesen enthalten. Es werden dementsprechend zwei fundamentale Grundtypen des allgemeinen Containment Problems definiert.

### 5.1 Definition

Sei  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C}^d$  eine Familie von Körpern des  $\mathbb{R}^d$  und  $\varphi^d : \mathcal{C}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ein nicht-negatives und bezüglich der Mengeninklusion monoton wachsendes Funktional (etwa Normmaximum, Volumen, Radien). Weiter sei  $\Gamma = (\mathcal{C}^d)_{d \in \mathbb{N}}$  und  $\Phi = (\varphi^d)_{d \in \mathbb{N}}$ . Dann lauten die beiden Grundtypen wie folgt:

a)  $(\Gamma, \Phi)$ –INBODY

*Input:*  $d \in \mathbb{N}$ ,  $K \subset \mathbb{R}^d$  ein konvexer Körper (in  $\mathcal{V}$ -,  $\mathcal{H}$ -Darstellung oder einer anderen geeigneten Präsentation) und  $\lambda \in \mathbb{Q}_+$ .

*Frage:* Existiert ein  $C \in \mathcal{C}^d$ , sodass  $C \subset K$  und  $\varphi^d(C) \geq \lambda$ ?

b)  $(\Gamma, \Phi)$ –CIRCUMBODY

*Input:*  $d \in \mathbb{N}$ ,  $K \subset \mathbb{R}^d$  ein konvexer Körper (in  $\mathcal{V}$ -,  $\mathcal{H}$ -Darstellung oder einer anderen geeigneten Präsentation) und  $\lambda \in \mathbb{Q}_+$ .

*Frage:* Existiert ein  $C \in \mathcal{C}^d$ , sodass  $K \subset C$  und  $\varphi^d(C) \leq \lambda$ ?

**BEMERKUNG:** Viele der typischen Containment Probleme haben folgende Struktur: Für jedes  $d \in \mathbb{N}$  ist ein fester Körper  $C^d \subset \mathbb{R}^d$  gegeben und eine Gruppe  $\mathcal{G}^d$  von Transformationen (auf der Menge der Körper) und  $\mathcal{C}^d$  ist dann der *Orbit* von  $C^d$  unter  $\mathcal{G}^d$ , d.h.  $\mathcal{C}^d = \{g(C^d) : g \in \mathcal{G}^d\}$ .

Ist  $C^d$  kompakt und  $\mathcal{G}^d$  die Gruppe der invertierbaren affinen Abbildungen, dann ist  $\varphi^d$  oftmals gegeben als  $\varphi^d(g(C^d)) = \text{Vol}(g(C^d))$ .

Ist  $\mathcal{G}^d$  die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen (Dilatation, Translation, Drehung, Spiegelung) oder der Homothetien (Dilatation, Translation), dann misst  $\varphi^d(g(C^d))$  meistens den Dilatationsfaktor von  $g$ .

### 5.2 Beispiel

Wählen wir etwa  $\mathcal{C}^d = \{\rho \mathbb{B}^d : \rho \geq 0\}$ ,  $d \in \mathbb{N}$  (also  $C^d = \mathbb{B}^d$  und  $\mathcal{G}^d$  die Gruppe der Dilatationen) und  $\varphi^d(\rho \mathbb{B}^d) = \rho$ , dann entspricht wegen

$$\max\{\|x\| : x \in K\} = \min\{\lambda : K \subset \lambda \mathbb{B}^d\}$$

$(\Gamma, \Phi)$ -CIRCUMBODY der Verifikation einer oberen Schranke für das Normmaximum des gegebenen Körpers. Bei den Schwerebeweisen in Abschnitt 4 haben wir Probleme zur Verifikation von unteren Schranken des Normmaximums betrachtet. Es gilt jedoch, dass die Schwere des einen die des anderen impliziert.  $(d; \lambda, x^1, \dots, x^d)$  ist zum Beispiel genau dann eine Ja-Instanz von  $[-1, 1]$ PARMAX<sub>p</sub>, wenn  $(d; \sum_{i=1}^d [-1, 1]x^i, \lambda - \epsilon)$  für ein  $\epsilon$  in Abhängigkeit der Kodierungslänge der  $x^1, \dots, x^d$  eine Nein-Instanz von  $(\Gamma, \Phi)$ -CIRCUMBODY ist. Es folgt die co-NP-Vollständigkeit<sup>1</sup> von  $(\Gamma, \Phi)$ -CIRCUMBODY, selbst im Falle der Beschränkung des zulässigen Inputs auf Parallelotope mit Zentrum 0.

In den im Folgenden zu betrachtenden speziellen Varianten der beiden Containment Probleme wird es aus Kompaktheits- und Stetigkeitsgründen immer bezüglich  $\varphi$  optimale Körper geben (Blaschkescher Auswahlssatz). Daher ist  $(\Gamma, \Phi)$ -CIRCUMBODY quasi eine Entscheidungsvariante von  $\min\{\varphi^d(C) : C \in \mathcal{C}^d, C \supset K\}$  und  $(\Gamma, \Phi)$ -INBODY entsprechend eine Entscheidungsvariante von  $\max\{\varphi^d(C) : C \in \mathcal{C}^d, C \subset K\}$ .

‘Echte’ Entscheidungsprobleme sind die beiden folgenden Inbody und Circumbody Varianten:

CIRCUMBODY-VERIFICATION (INBODY-VERIFICATION):

INPUT:  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{V}$ - oder  $\mathcal{H}$ -Polytope  $C, K \subset \mathbb{R}^d$ .

FRAGE: Gilt  $K \subset C$  ( $C \subset K$ )?

Die beiden Probleme sind offensichtlich äquivalent und nur aus didaktischen Gründen beide aufgeführt. Es genügt also eines genauer zu betrachten.

### 5.3 Satz

a) CIRCUMBODY-VERIFICATION ist in  $\mathbb{P}$ , falls

- (i)  $C, K$  beide  $\mathcal{V}$ -Polytope,
- (ii)  $C, K$  beide  $\mathcal{H}$ -Polytope, oder
- (iii)  $C$  ein  $\mathcal{H}$ -Polytop und  $K$  ein  $\mathcal{V}$ -Polytop.

b) CIRCUMBODY-VERIFICATION ist co-NP-vollständig<sup>2</sup>, selbst wenn  $C$  auf reguläre Kreuzpolytope und  $K$  auf Paralleloptope (in  $\mathcal{S}$ - oder  $\mathcal{H}$ -Darstellung) eingeschränkt wird.

---

<sup>1</sup>d.h., das Problem ist NP-schwer und seine Verneinung ‘Existiert kein  $\rho \mathbb{B}_p^d$ , sodass  $K \subset \rho \mathbb{B}^d$  und  $\rho \leq \lambda$  liegt in NP. Hinreichendes Zertifikat ist  $y \in K$  mit  $\|y\|_p > \lambda$ .

<sup>2</sup>d.h., die Verneinung ‘Gilt  $K \not\subset C$ ’ ist NP-vollständig.

BEWEIS: siehe Übung 4.4

□

BEMERKUNG: Man beachte, dass sich die Schwere von ‘ $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{V}$ ’ immer wieder finden lässt (vgl. auch  $[-1, 1]PARMAX_1$ ), wogegen sich in den anderen Fällen auch in scheinbar schwierigeren Situationen noch positive Aussagen ergeben.

## 6 Geometrische und algorithmische Grundlagen der Radienberechnung

Sei  $\mathbb{M} = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$  ein Minkowski Raum,  $K \subset \mathbb{M}$  ein Körper und  $j \in \{1, \dots, d\}$ .

### 6.1 Definition

Sei  $A \subset \mathbb{M}$  abgeschlossen und beschränkt.

- a) Der innere  $j$ -Radius  $r_j(A)$  ist das Maximum der Radien aller  $j$ -Kugeln die in  $A$  enthalten sind.
- b) Der äußere  $j$ -Radius  $R_j(A)$  ist das Minimum der Radien aller  $j$ -Zylinder die  $A$  enthalten.

BEMERKUNG: Da  $j$ -Zylinder konvexe Mengen sind, gilt natürlich  $R_j(A) = R_j(\text{conv}(A))$ . Speziell ist der äußere  $j$ -Radius einer endlichen Punktmenge gleich dem des  $\mathcal{V}$ -Polytopes mit den entsprechenden Ecken. Analoges gilt für die inneren Radien natürlich nicht, sodass wir uns hier auch ausschließlich auf Körper beschränken werden.

### 6.2 Bemerkung

- a) Für  $j = d$  ergeben sich der gewöhnliche In- und Umradius. Ist  $j = 1$  so misst  $r_1(K)$  den halben Durchmesser ( $\max_{x,y \in K} \|x - y\|$ ) und  $R_1(K)$  die halbe Dicke (minimaler Abstand zweier paralleler stützender Hyperebenen von  $K$ ).
- b) Ist  $d = 3$  und  $j = 2$  so messen  $r_j(K)$  den Radius einer größten Kreisscheibe in  $K$  und  $R_j(K)$  den Radius eines minimalen (unendlichen) Zylinders der  $K$  enthält.
- c) Die den Radien zugrundeliegenden Containment Probleme sind  $(\Gamma, \Phi)$ -INBODY mit

$$\mathcal{C}^d = \{c + \rho(\mathbb{B} \cap F) : c \in \mathbb{M}, \rho \geq 0, F \subset \mathbb{M} \text{ } j\text{-dim. linearer Unterraum}\}$$

und

$$\varphi^d(c + \rho(\mathbb{B} \cap F)) = \rho$$

bzw.  $(\Gamma, \Phi)$ -CIRCUMBODY mit

$$\mathcal{C}^d = \{F + \rho\mathbb{B} : \rho \geq 0, F \subset \mathbb{M} \text{ (} d-j \text{)-dim. affiner Unterraum}\}$$

und

$$\varphi^d(F + \rho\mathbb{B}) = \rho.$$

d) Offensichtlich gilt  $r_d(K) \leq \dots \leq r_1(K)$  und  $R_1(K) \leq \dots \leq R_d(K)$ .

e) Zentren und Unterräume zu den  $j$ -Radien müssen im allgemeinen nicht eindeutig sein, nicht einmal für  $j = d = 2$ .

f) Ist  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_2^d$  so ist

$$R_j(K) = \min\{R_j(K|E) : E \subset \mathbb{R}^d \text{ } j\text{-dim. linearer Teilraum}\},$$

wobei  $K|E$  die orthogonale Projektion von  $K$  auf  $E$  bezeichnet.

g) Es gibt andere Verallgemeinerungen der 'klassischen' Radien (In-, Umradius, Dicke, Durchmesser). Die hier eingeführten scheinen die natürlichsten (gemessen an ihrem Auftreten in Anwendungen).

### 6.3 Lemma

Das Polare einer  $j$ -Kugel mit Zentrum  $0$  und Radius  $\rho$  ist ein  $j$ -Zylinder um einen linearen Unterraum mit Radius  $\frac{1}{\rho}$  (und vice-versa). Genauer: Ist  $F \subset \mathbb{M}$  ein  $j$ -dimensionaler linearer Unterraum, dann ist  $F^\circ \subset \mathbb{M}^*$  ein  $(d-j)$ -dimensionaler Unterraum und es gilt

$$(\rho\mathbb{B} \cap F)^\circ = \frac{1}{\rho}\mathbb{B}^* + F^\circ \text{ bzw. } (\rho\mathbb{B} + F)^\circ = \frac{1}{\rho}\mathbb{B}^* \cap F^\circ.$$

BEWEIS: Da  $\frac{1}{\rho}\mathbb{B}^* \cap F^\circ$  ein Körper ist der  $\{0\}$  enthält, genügt es wegen Lemma 1.9 (c) die erste der beiden Mengengleichungen zu zeigen.

Sei zunächst  $u \in \frac{1}{\rho}\mathbb{B}^* \cup F^\circ$ . Nach Beispiel 1.6 ist  $\frac{1}{\rho}\mathbb{B}^* = (\rho\mathbb{B})^\circ$ . Es folgt  $\langle u, x \rangle \leq 1, \forall x \in \rho\mathbb{B}$  oder  $\langle u, x \rangle \leq 1, \forall x \in F$ . Folglich ist  $u \in (\rho\mathbb{B} \cap F)^\circ$ , d.h.  $\frac{1}{\rho}\mathbb{B}^* \cup F^\circ \subset (\rho\mathbb{B} \cap F)^\circ$ . Da letzteres aber konvex und abgeschlossen ist, folgt natürlich, dass auch  $\frac{1}{\rho}\mathbb{B}^* + F^\circ \subset (\rho\mathbb{B} \cap F)^\circ$ .

Sei nun  $x \in (\frac{1}{\rho}\mathbb{B}^* + F^\circ)^\circ$ . Dann gilt  $\langle y + z, x \rangle \leq 1, \forall y \in \frac{1}{\rho}\mathbb{B}^*$  und  $z \in F^\circ$ . Da sowohl  $y = 0$  als auch  $z = 0$  gewählt werden kann, folgt  $\langle y, x \rangle \leq 1, \forall y \in (\rho\mathbb{B})^\circ$  und  $\langle z, x \rangle \leq 1, \forall z \in F^\circ$ . Also ist  $x \in \rho\mathbb{B} \cap F$  und es folgt  $(\frac{1}{\rho}\mathbb{B}^* + F^\circ)^\circ \subset \rho\mathbb{B} \cap F$ .

Wegen Lemma 1.7 und Lemma 1.9 (c) gilt damit aber auch  $\frac{1}{\rho}\mathbb{B}^* + F^\circ \supset (\rho\mathbb{B} \cap F)^\circ$ .  $\square$

### 6.4 Lemma

Sei  $K$  0-symmetrisch. Dann gilt:

- a)  $K$  enthält eine  $j$ -Kugel vom Radius  $r_j(K)$  mit Mittelpunkt  $0$ .
- b) Es existiert ein  $(d-j)$ -dimensionaler linearer Unterraum  $F$ , sodass  $K \subset F + R_j(K)$ .
- c)  $r_j(K)R_j(K^\circ) = 1$  und  $R_j(K)r_j(K^\circ) = 1$ .

BEWEIS:

- a) Sei  $c \in \mathbb{M}$  und  $F \subset \mathbb{M}$  ein linearer  $j$ -dimensionaler Unterraum, sodass die  $j$ -Kugel  $B := c + r_j(K)(\mathbb{B} \cap F) \subset K$ . Da  $K = -K$  gilt auch  $-B \subset K$  und da  $K$  konvex ist, gilt  $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}(-B) = r_j(K)(\mathbb{B} \cap F) \subset K$ .
- b) Sei  $c \in \mathbb{M}$  und  $F \subset \mathbb{M}$  ein linearer  $(d-j)$ -dimensionaler Unterraum, sodass der  $j$ -Zylinder  $C := (F + c) + \mathbb{R}_j(K)\mathbb{B} \supset K$ . Wieder aus der Symmetrie von  $K$  folgt  $-C \supset K$  und aus der Konvexität dann, dass  $K \subset \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}(-C) = F + R_j(K)\mathbb{B}$ .
- c) Nach Teil (a) gibt es einen  $j$ -dimensionalen Unterraum  $F$  von  $\mathbb{M}$ , sodass  $r_j(K)(\mathbb{B} \cap F) \subset K$ . Mit Lemma 1.7 und Lemma 6.3 folgt daher

$$\frac{1}{r_j(K)}\mathbb{B}^* + F^\circ \supset K^\circ,$$

also ist  $R_j(K^\circ) \leq \frac{1}{r_j(K)}$ .

Andererseits existiert nach Teil (b) ein  $(d-j)$ -dimensionaler linearer Unterraum  $E$  von  $\mathbb{M}^*$ , sodass  $R_j(K^\circ)\mathbb{B}^* + E \supset K^\circ$ . Wieder folgt mit Lemma 1.7 und Lemma 6.3, dass

$$\frac{1}{R_j(K^\circ)}\mathbb{B} \cap E^\circ \subset (K^\circ)^\circ = K.$$

Also ist  $r_j(K) \geq \frac{1}{R_j(K^\circ)}$  und insgesamt folgt  $r_j(K)R_j(K^\circ) = 1$ .

Die zweite Gleichung folgt analog.

□

### 6.5 Lemma

Es gilt  $r_d(K) \leq R_1(K)$  und  $r_1(K) \leq R_d(K)$ . Ist  $K$  symmetrisch, so sind beide Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt.

BEWEIS: Natürlich hat eine 1-Kugel (Segment) mit Radius  $r_1(K)$  bereits Umradius  $r_1(K)$ . Enthält  $K$  also so eine 1-Kugel, dann gilt natürlich  $R_d(K) \geq r_1(K)$ . Ebenso ist die halbe Dicke von  $r_d(K)\mathbb{B}$  offensichtlich bereits  $r_d(K)$ . Es folgt also wiederum aus der Monotonität der Radien bezüglich Mengeninklusion, dass  $r_d(K) \leq R_1(K)$ .

Sei nun  $K$  symmetrisch, o.E.  $K = -K$ . Nach Lemma 6.4(b) ist  $K \subset R_d(K)\mathbb{B}$ . Nun muss es einen Punkt  $x \in K \cap R_d(K)\mathbb{S}$  geben und natürlich gilt dann auch  $-x \in K \cap R_d(K)\mathbb{S}$ . D.h.  $2R_d(K) = \|x - (-x)\| \leq 2r_1(K)$ . Insgesamt folgt  $r_1(K) = R_d(K)$  und mit Lemma 6.4 (c) auch  $R_1(K) = r_d(K)$ .  $\square$

## 6.6 Definition

a) Ein  $x \in \text{bd}(K)$  heißt *glatt*, wenn die Stützhyperebene durch  $x$  an  $K$  eindeutig ist.

b)  $x, y \in K$  heißen *diametral*, wenn  $\|x - y\| = 2r_1(K)$ .

c)  $K$  heißt

(i) *rotund*, wenn alle Randpunkte von  $K$  Ecken von  $K$  sind.

(ii) *glatt*, wenn alle Randpunkte von  $K$  glatt sind.

BEMERKUNG: Man beachte, dass  $K$  genau dann glatt ist, wenn  $K^\circ$  rotund ist.

## 6.7 Lemma

Ist  $\mathbb{B}$  rotund und  $v, w \in \mathbb{M}$  mit  $\|v\| = \|w\|$ , so folgt aus  $\|v - w\| = \|v\| + \|w\|$ , dass  $w = -v$ .

BEWEIS: Sei  $u \in \mathbb{S}^*$  mit  $\langle u, v - w \rangle = \|v - w\|$ . Dann gilt nach Annahme  $\|v\| + \|w\| = \langle u, v \rangle + \langle u, -w \rangle$  und es folgt  $\frac{v}{\|v\|}, \frac{-w}{\|w\|} \in \mathbb{S} \cap H_{u,1}$ . Da  $\mathbb{B}$  rotund ist, muss daher  $v = -w$  sein.  $\square$

## 6.8 Lemma

Es gibt ein diametrales Paar  $v, w$  von Extrempunkten von  $K$  und falls  $\mathbb{B}$  rotund ist, besteht jedes diametrale Paar von  $K$  aus Ecken von  $K$ .

Gilt  $K = -K$ , so kann  $w = -v$  gewählt werden und für rotunde  $\mathbb{B}$  ist jeder Punkt eines diametralen Paares das Negative des anderen.

BEWEIS: Für jedes  $z \in K$  sei  $\varphi_z : K \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $\varphi_z(x) = \|x - z\|$ ,  $x \in K$ . Dann ist  $\varphi_z$  konvex und stetig. Also nimmt  $\varphi_z$  sein Maximum an einem Extrempunkt von  $K$  an (siehe Korollar 2.4.26, Optimierung I). Ist  $\mathbb{B}$  rotund, so ist jeder Randpunkt von  $\mathbb{B}$  Ecke und da  $x \in \varphi_z(x)\mathbb{S}$ , falls  $x$  Maximalpunkt von  $\varphi_z$  über  $K$  ist, folgt, dass  $x$  Ecke von  $K$  ist.

Seien  $a, b \in K$  mit  $\|a - b\| = 2r_1(K)$ ,  $w$  ein Extrempunkt von  $K$  der  $\varphi_a$  maximiert und  $v$  ein Extrempunkt von  $K$  der  $\varphi_w$  maximiert. Dann gilt natürlich  $2r_1(K) = \|a - w\| = \|v - w\|$ .

Ist nun  $K = -K$  so sind auch  $-v, -w$  Extrempunkte von  $K$  und da  $2r_1(K) = \|v - w\| \leq \|v\| + \|w\|$  ist, gilt  $\max\{\|v\|, \|w\|\} \geq r_1(K)$ . Also ist mindestens eins der Paare  $\{v, -v\}$  oder  $\{w, -w\}$  diametral.

Die letzte Teilaussage folgt nun aus Lemma 6.7.  $\square$

### 6.9 Lemma

Sei  $K = -K$  und jeder Extrempunkt von  $K^\circ$  auch Ecke von  $K^\circ$ . Dann existieren parallele Stützhyperebenen  $H_1$  und  $H_2$  an  $K$ , sodass

(i) der Abstand von  $H_1$  und  $H_2$  gleich  $2R_1(K)$  ist, und

(ii) glatte Randpunkte  $-z, z$  von  $K$  existieren mit  $-z \in H_1$  und  $z \in H_2$ .

Ist  $\mathbb{B}$  glatt, so erfüllt jedes Paar von Hyperebenen, welches (i) erfüllt auch (ii).

BEWEIS: Nach Lemma 6.8 existiert ein Extrempunkt  $u$  von  $K^\circ$  mit  $\|u\| = r_1(K^\circ)$ . Nun ist  $u$  nach Voraussetzung auch Ecke von  $K^\circ$ , d.h. es existiert ein  $z \in \text{bd}(K)$  mit  $\langle u, z \rangle = 1$  und  $\langle y, z \rangle < 1$  für alle  $y \in K^\circ \setminus \{u\}$ . Folglich ist  $z$  ein glatter Randpunkt von  $K$ . Setzt man nun  $H_1 = H_{-u,1}$  und  $H_2 = H_{u,1}$ , dann gilt  $-z \in H_1$  und  $z \in H_2$  und der Abstand der beiden Hyperebenen ist  $\frac{2}{r_1(K^\circ)}$ , was wegen Lemma 6.4 (c) die verlangten  $2R_1(K)$  sind.

Schließlich folgt aus der Glattheit von  $\mathbb{B}$ , dass  $\mathbb{B}^*$  rotund ist und daher mit Lemma 6.8 auch die letzte Teilaussage.  $\square$

BEMERKUNG: Die Voraussetzung, dass jeder Extrempunkt von  $K^\circ$  bereits Ecke von  $K^\circ$  ist, kann nicht gestrichen werden!

### 6.10 Definition

Sei  $s \in \mathbb{S}$  und  $s^* \in \mathbb{S}^*$ . Dann ist die

a)  $s$ -Länge  $l_s(K)$  die Länge eines längsten Segments in  $K$  parallel zu  $s$ .

b)  $s^*$ -Breite  $b_{s^*}(K)$  von  $K$  definiert durch

$$b_{s^*} = \max_{x \in K} \langle s^*, x \rangle - \min_{x \in K} \langle s^*, x \rangle.$$

### 6.11 Lemma

Sei  $C = \frac{1}{2}(K - K)$ . Dann gilt  $l_s(C) = l_s(K)$  und  $b_{s^*}(C) = b_{s^*}(K)$  für jedes  $s \in \mathbb{S}$  bzw. jedes  $s^* \in \mathbb{S}^*$ .

BEWEIS: Sei zunächst  $s \in \mathbb{S}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
l_s(K) &= \max\{\|x - x'\| : x, x' \in K, \exists \lambda \in \mathbb{R} : x - x' = \lambda s\} \\
&= \max\{\|y\| : y \in K - K, \exists \lambda \in \mathbb{R} : y = \lambda s\} \\
&= 2 \max\{\|z\| : z \in C, \exists \lambda \in \mathbb{R} : z = \lambda s\} \\
&= \max\{\|z - (-z)\| : z \in C, \exists \lambda \in \mathbb{R} : z = \lambda s\} \\
&= \max\{\|z - z'\| : z, z' \in C, \exists \lambda \in \mathbb{R} : z - z' = \lambda s\} \\
&= l_s(C).
\end{aligned}$$

Für  $s^* \in \mathbb{S}^*$  gilt

$$\begin{aligned}
b_{s^*}(K) &= \max\{\langle s^*, x - x' \rangle : x, x' \in K\} \\
&= \max\{\langle s^*, y \rangle : y \in K - K\} \\
&= 2 \max\{\langle s^*, z \rangle : z \in C\} \\
&= \max\{\langle s^*, z \rangle : z \in C\} - \min\{\langle s^*, z \rangle : z \in C\} \\
&= b_{s^*}(C)
\end{aligned}$$

□

BEMERKUNG: Die Menge  $K - K$  heißt Differenzkörper von  $K$ , die Menge  $\frac{1}{2}(K - K)$  Zentralsymmetrisierte von  $K$ .

### 6.12 Korollar

*Es gilt:*

$$a) \ 2r_1(K) = \max_{s \in \mathbb{S}} l_s(K) = \max_{s^* \in \mathbb{S}^*} b_{s^*}(K)$$

$$b) \ 2R_1(K) = \min_{s \in \mathbb{S}} l_s(K) = \min_{s^* \in \mathbb{S}^*} b_{s^*}(K)$$

BEWEIS: Seien  $\lambda_{min}, \lambda_{max}$  bzw.  $\beta_{min}, \beta_{max}$  die Minima und Maxima der  $s$ -Längen und  $s^*$ -Breiten. Nach Definition der Radien ist klar, dass  $2r_1(K) = \lambda_{max}$  und  $2R_1(K) = \beta_{min}$ . Wegen Lemma 6.11 können wir oBdA annehmen, dass  $K = -K$  ist. Ferner nehmen wir o.E. an, dass  $\lambda_{max} = 2$  gilt, d.h.  $K \subset \mathbb{B}$  und  $\exists x, -x \in \text{bd}(K) \cap \mathbb{S}$ . Nach Korollar 0.9 gibt es ein  $s^* \in \mathbb{S}^*$  mit  $\langle s^*, x \rangle = 1$ , d.h.  $\beta_{max} = 2$ .

Der Beweis für  $\beta_{min} = \lambda_{min}$  geht analog (oder über Polarität). □

### 6.13 Lemma

$$a) \ 2r_1(K) = \max\{\tau \in \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{M}, \|t\| = \tau, \text{ sodass } (K + t) \cap K \neq \emptyset\}.$$

$$b) \ 2R_1(K) = \max\{\tau \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{M}, \|t\| = \tau \text{ gilt } (K + t) \cap K \neq \emptyset\}.$$

BEWEIS:

a) Sei  $\tau^* = \max\{\tau \in \mathbb{R} : \exists t \in M, \|t\| = \tau, \text{ sodass } (K + t) \cap K \neq \emptyset\}$  und  $x, x' \in K$ , sodass  $\|x - x'\| = \max_{s \in S} l_s(K) = 2r_1(K)$ . Dann gilt  $x \in (K + t) \cap K$  für  $t = x - x'$ . Also ist  $2r_1(K) \leq \tau^*$ . Ist andererseits  $x \in (K + t) \cap K$  für ein  $t \in \mathbb{M}$  mit  $\|t\| = \tau^*$ , dann sind  $x, x - t \in K$  und  $\|x - (x - t)\| = \tau^*$ , also  $2r_1(K) \geq \tau^*$ .

b) Fast analog - siehe Übung!

□

### 6.14 Bemerkung

Da  $x \in R_j(K)\mathbb{B} + F \Leftrightarrow (x + R_j(K)\mathbb{B}) \cap F \neq \emptyset$  kann der äußere  $j$ -Radius auch wie folgt dargestellt werden:

$$R_j(K) = \min \{ \rho \geq 0 : \exists F \subset \mathbb{M} \text{ (} d - j \text{)-dim. affiner Teilraum,} \\ \text{sodass } (x + \rho\mathbb{B}) \cap F \neq \emptyset, \forall x \in K \}.$$

Speziell im Fall  $j = d$  erhält man damit, dass

$$R_d(K) = \min \left\{ \rho \geq 0 : \bigcap_{x \in K} (x + \rho\mathbb{B}) \neq \emptyset \right\}.$$

### 6.15 Lemma

Die Menge der Umkugelmittelpunkte von  $K$  ist konvex und falls  $\mathbb{B}$  rotund ist einelementig.

BEWEIS: Die Menge der möglichen Umkugelmittelpunkte ist nach 6.14 gerade  $\bigcap_{x \in K} (x + R_d(K)\mathbb{B})$ , also als Schnitt konvexer Mengen wieder konvex. Sei nun  $\mathbb{B}$  rotund und  $c^1, c^2$  Mittelpunkte von Umkugeln von  $K$ . Dann ist auch  $c = \frac{1}{2}(c^1 + c^2)$  Mittelpunkt der Umkugel von  $K$ . Daher muss es ein  $x \in K$  geben, sodass  $\|x - c\| = R_d(K)$ . Damit gilt aber  $R_d(K) = \|x - c\| = \|\frac{1}{2}(x - c^1) + \frac{1}{2}(x - c^2)\| \leq \frac{1}{2}\|x - c^1\| + \frac{1}{2}\|x - c^2\| \leq R_d(K)$ . Es folgt also  $\|x - c^1\| = \|x - c^2\| = R_d(K)$  und  $\|(x - c^1) + (x - c^2)\| = \|x - c^1\| + \|x - c^2\|$ . Da  $\mathbb{B}$  rotund ist folgt mit Lemma 6.7, dass  $x - c^1 = x - c^2$  also  $c^1 = c^2$ . □

### 6.16 Satz (Helly)

Seien  $K_1, \dots, K_m \subset \mathbb{R}^d$  Körper,  $m \geq d+1$  und der Durchschnitt  $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$ , für alle  $I \subset \{1, \dots, m\}$  mit  $|I| = d + 1$ . Dann ist  $\bigcap_{i=1}^m K_i \neq \emptyset$ .

BEWEIS: siehe Übung 5.4.

□

### 6.17 Korollar

$R_d(K) = \sup\{R_d(S) : S \subset K, S \text{ Simplex}\}.$

BEWEIS: Sei  $\rho^* = \max\{R_d(S) : S \subset K, S \text{ Simplex}\}.$  Dann ist natürlich  $R_d(K) \geq \rho^*.$

Nun betrachte die Menge  $\mathcal{B}$  der Kugeln  $\{x + \rho\mathbb{B} : x \in K, \rho > \rho^*\}.$  Nach Definition von  $\rho^*$  haben je  $d+1$  dieser Kugeln einen nichtleeren Durchschnitt. Also folgt aus dem Satz von Helly, dass jede endliche Teilmenge von  $\mathcal{B}$  einen nichtleeren Durchschnitt besitzt und daher wegen Kompaktheit, dass

$$\bigcap_{\substack{x \in K \\ \rho > \rho^*}} x + \rho\mathbb{B} \neq \emptyset.$$

Jeder Punkt dieses Durchschnitts ist der Mittelpunkt einer Kugel vom Radius  $\rho^*$ , die  $K$  enthält.  $\square$

BEMERKUNG:

- a) Die Dimension der Menge der möglichen Mittelpunkte eines Körpers ist höchstens  $d - 1$  und diese Schranke wird zum Beispiel durch Achsenparallele Liniensegmente oder durch volldimensionale Ellipsoide, falls deren kleinste Halbachse eindeutig ist, in  $\mathbb{B}_\infty$  erreicht.
- b) Mittelpunkte der Umkugel müssen nicht grundsätzlich in  $K$  liegen. Es gilt vielmehr die nachfolgende Charakterisierung:

### 6.18 Satz

Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

- a) Für alle Körper  $K \subset \mathbb{M}$  gilt  $K \subset c + R_d(K)\mathbb{B}$  für ein  $c \in K.$
- b)  $d = 2$  oder  $\mathbb{B}$  ein Ellipsoid.

BEMERKUNG: Ist  $\mathbb{B}$  ein Ellipsoid so wird  $\mathbb{M}$  meist schon als euklidisch bezeichnet.

BEWEIS: Wir zeigen nur die Rückrichtung und Beschränken uns im Falle der ellipsoidalen Einheitskugel auf  $\mathbb{B} = \mathbb{B}_2.$  Für einen vollständigen Beweis siehe [10].

Wir betrachten zunächst den Fall  $d = 2$  und nehmen an, dass  $c \notin K$  für alle möglichen Umkugelmittelpunkte  $c$  ist. Es gilt also

$$\bigcap_{\substack{x \in K \\ \rho > R_d(K)}} (x + \rho\mathbb{B}) \cap K = \emptyset.$$

Aus der Kompaktheit von  $K$  und  $\mathbb{B}$  und dem Satz von Helly folgt dann aber, dass bereits für ein Paar  $x^1, x^2 \in K$  der Schnitt

$$(x^1 + R_d(K)\mathbb{B}) \cap (x^2 + R_d(K)\mathbb{B}) \cap K$$

leer sein muss. Andererseits ist  $K$  konvex, also  $\frac{1}{2}(x^1 + x^2) \in K$  und da  $r_1(K) \leq R_d(K)$  folgt  $\frac{1}{2}(x^1 + x^2) \in (x^1 + R_d(K)\mathbb{B}) \cap (x^2 + R_d(K)\mathbb{B})$ . Also kann der Schnitt der drei Mengen nicht leer sein.

Sei nun  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_2^d$ . Da  $\mathbb{B}$  rotund ist, folgt die Eindeutigkeit von  $c$ . Aus der Annahme  $c \notin K$  folgt die Existenz einer streng trennenden Hyperebene  $H_{u,\alpha}$  von  $c$  und  $K$ . Sei nun  $c'$  die Orthogonalprojektion von  $c$  auf  $H_{u,\alpha}$  und für  $x \in K$  sei  $x'$  der Schnittpunkt des Segments  $[x, c]$  mit  $H_{u,\alpha}$ . Dann gilt für alle  $x \in K$ :

$$\|x - c'\| \leq \|x - x'\| + \|x' - c'\| < \|x - x'\| + \|x' - c\| = \|x - c\|,$$

im Widerspruch zur Minimalität des Umradius.  $\square$

### Beispiel

Sei  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_\infty^2$  und  $P = \text{conv}\{e^1 + e^2 + e^3, -e^1 + e^2 + e^3, e^1 - e^2 + e^3, e^1 + e^2 - e^3\}$ , dann ist  $R_d(P) = 1$  und  $0 \notin P$  der eindeutige Mittelpunkt der Umkugel von  $P$ .

### 6.19 Lemma

Für jedes  $z \in K$  und  $x \in \mathbb{M}$  sei  $\varphi_z = \|x - z\|$  und  $\Phi(x) = \sup_{z \in K} \varphi_z(x)$ . Dann nimmt  $\Phi$  sein Infimum an, welches der Umkugelradius von  $K$  ist.

BEWEIS: Natürlich ist jedes Funktional  $\varphi_z$  konvex und kontrahierend, denn

$$|\varphi(x^1) - \varphi(x^2)| = |||x^1 - z| - |x^2 - z|| \leq \|x^1 - x^2\|$$

folgt aus  $\|x^i - z\| \leq \|x^1 - x^2\| + \|x^j - z\|$ ,  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ . Als Supremum konvexer Funktionale ist  $\Phi$  wieder konvex und wie leicht einzusehen auch wieder Kontraktion, also stetig. Da schließlich  $\Phi(x) \rightarrow \infty$  für  $\|x\| \rightarrow \infty$  gilt, folgt, dass  $\Phi$  sein Minimum annimmt, welches nach Definition der Umkugelradius von  $K$  ist.  $\square$

### 6.20 Lemma

Sei  $U \subset \mathbb{M}^* \setminus \{0\}$ ,  $\alpha_u \in \mathbb{R}$  und  $z \in \mathbb{M}$ .

a) Für  $u \in U$  und  $z \in H_{u,\alpha_u}^+$  ist

$$\min_{x \in H_{u,\alpha_u}} \|x - z\| = \frac{\alpha_u - \langle u, z \rangle}{\|u\|^*}.$$

b) Ist  $K = \bigcap_{u \in U} H_{u, \alpha_u}^+ \neq \emptyset$ , dann ist

$$r_d(K) = \sup_{z \in \mathbb{M}} \inf_{u \in U} \frac{\alpha_u - \langle u, z \rangle}{\|u\|^*}.$$

BEWEIS:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \|u\|^* &= \max_{x \neq 0} \frac{\langle u, x \rangle}{\|x\|} = \max_{x \neq z} \frac{\langle u, x - z \rangle}{\|x - z\|} \\ &= \max_{x \in H_{u, \alpha_u}} \frac{\langle u, x - z \rangle}{\|x - z\|} = \frac{\alpha_u - \langle u, z \rangle}{\min_{x \in H_{u, \alpha_u}} \|x - z\|}. \end{aligned}$$

b) Der maximale Radius einer in  $K$  enthaltenen Kugel mit Mittelpunkt  $z$  ist das Infimum über die Abstände von  $z$  zu den  $K$  stützenden Hyperebenen  $H_{u, \alpha_u}$ , nach a) also

$$\inf_{u \in U} \frac{\alpha_u - \langle u, z \rangle}{\|u\|^*}.$$

Der Inkugelradius ergibt sich dann gerade über eine optimale Wahl eines solchen  $z$ .

□

Es folgen noch einige Aussagen speziell für Polytope:

### 6.21 Korollar

Seien  $u^1, \dots, u^m \in \mathbb{M}^* \setminus \{0\}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  und  $P = \bigcap_{i=1}^m H_{u^i, \alpha_i}^+$  ein Polytop. Dann gilt

$$r_d(P) = \min \left\{ r_d(S_I) : S_I = \bigcap_{i \in I} H_{u^i, \alpha_i}^+, I \subset \{1, \dots, m\}, |I| = d + 1 \right\}.$$

BEWEIS: Sei

$$\rho = \min \left\{ r_d(S_I) : S_I = \bigcap_{i \in I} H_{u^i, \alpha_i}^+, I \subset \{1, \dots, m\}, |I| = d + 1 \right\}.$$

Offensichtlich ist dann  $r_d(P) \leq \rho$ . Ist  $c_I$  Mittelpunkt einer Inkugel von  $S_I$  so gilt nach Lemma 6.20, dass

$$\min_{x \in H_{u^i, \alpha_i}} \|x - c_I\| = \frac{\alpha_i - \langle u^i, c_I \rangle}{\|u^i\|^*} \geq r_d(S_I).$$

Also ist  $\langle u^i, c_I \rangle \leq \alpha_i - \rho \|u^i\|^* =: \alpha'_i$  für alle  $i \in I$  und somit  $c_I \in \bigcap_{i \in I} H_{u^i, \alpha'_i}$ . Mit dem Satz von Helly folgt daher, dass  $\bigcap_{i=1}^m H_{u^i, \alpha'_i} \neq \emptyset$ . Ist nun  $c$  ein Element dieses Schnittes, so gilt  $\langle u^i, c \rangle \leq \alpha'_i = \alpha_i - \rho \|u^i\|^*$  und nach Lemma 6.20, dass  $\min_{x \in H_{u^i, \alpha'_i}} \|x - c\| \geq \rho$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Es folgt  $c + \rho \mathbb{B} \subset P$  und daher  $\rho \leq r_d(P)$ , also insgesamt die Gleichheit.  $\square$

### 6.22 Lemma

Sei  $P$  ein Polytop und  $Q = \frac{1}{2}(P - P)$  das zugehörige zentralsymmetrisierte Polytop. Dann haben die Seiten von  $Q$  die Form  $\frac{1}{2}(F - G)$ , wobei  $F$  und  $G$  Seiten von  $P$  sind.

BEWEIS: Nach Definition 0.8(b) ist  $E$  eine Seite von  $Q$ , genau dann wenn  $E = Q \cap H_{u, \alpha}$  für eine Stützhyperebene  $H_{u, \alpha}$  von  $Q$ . Also ist  $E$  gerade die Menge der  $x \in Q$ , sodass  $\langle u, x \rangle = \max_{q \in Q} \langle u, q \rangle$ . Sei  $F$  die Seite von  $P$  mit  $u$  als äußerer Normalen und  $G$  die Seite von  $P$  mit  $-u$  als äußerer Normalen. Dann ist wegen  $\max_{q \in Q} \langle u, q \rangle = \frac{1}{2}(\max_{p_1 \in P} \langle u, p_1 \rangle + \max_{p_2 \in P} \langle -u, p_2 \rangle)$  offensichtlich  $E = \frac{1}{2}(F - G)$ .  $\square$

### 6.23 Korollar

Sei  $P$  ein  $d$ -dimensionales Polytop. Dann gibt es parallele Stützhyperebenen  $H_1, H_2$  an  $P$ , sodass

- (i) der Abstand von  $H_1$  und  $H_2$  gleich  $2R_1(K)$  ist, und
- (ii)  $\dim(P \cap H_1) + \dim(P \cap H_2) \geq d - 1$ .

Ist  $P$  symmetrisch, so gilt  $\dim(P \cap H_1) = \dim(P \cap H_2) = d - 1$ .

BEWEIS: Sei  $Q = \frac{1}{2}(P - P)$ . Da  $Q$  ein Polytop ist, gilt dies auch für  $Q^\circ$ . Folglich ist jeder Extrempunkt von  $Q^\circ$  bereits Ecke von  $Q^\circ$ , womit nach Lemma 6.9 Hyperebenen  $H_1, H_2$  mit Eigenschaft (i) existieren und glatte Randpunkte  $z^1, z^2$  von  $Q$ , sodass  $z^i \in H_i, i = 1, 2$ . Da die glatten Randpunkte eines Polytopes genau die relativ inneren Punkte der Facetten sind, folgt  $\dim(Q \cap H_i) = d - 1$  und damit die Behauptung im symmetrischen Fall. Die Behauptung für allgemeine  $P$  folgt schließlich mit Lemma 6.22.  $\square$

## 7 In- und Umradius - optimales Containment unter Homothetie

In diesem Abschnitt betrachten wir die in Definition 5.1 eingeführten Containment Probleme im Spezialfall, dass  $\mathcal{C}^d = \{g(C^d) : g \text{ Homothetie}\}$  ist,

wobei jedes  $C^d$  ein fester konvexer Körper des  $\mathbb{R}^d$  ist und  $\varphi^d(c + \rho C^d) = \rho$  für alle  $c \in \mathbb{R}^d$  und  $\rho \in \mathbb{R}$  ist. Ferner nehmen wir an, dass der Inputkörper  $K$  ein Polytop  $P$  ist.

Sind die  $C^d$  volldimensional und symmetrisch, so liegt im wesentlichen die Aufgabe vor Inradien bzw. Umradien in Minkowski-Räumen zu bestimmen, deren Einheitskugeln die  $C^d$  sind.

Die nachfolgenden Ergebnisse können alle auch auf den allgemeinen Fall asymmetrischer oder unterdimensionaler  $C^d$  übertragen werden. Dazu benötigt man nur ein wenig mehr Technik (siehe [12]). Wir beschränken uns hier auf die In- und Umkugelbestimmung, d.h. die beiden Containment Probleme lassen sich wie folgt in der Sprache der Radien formulieren:

Sei  $(\mathbb{M}^d)_{d \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Minkowski Räumen mit Einheitskugeln  $\mathbb{B}^d = C^d$ . Bestimme  $r_d(P)$  bzw.  $R_d(P)$  eines gegebenen Polytopes  $P \subset \mathbb{M}^d$ .

**Zur Erinnerung:** Wir sprechen im algorithmischen Sinn von  $\mathcal{V}$ - oder  $\mathcal{H}$ -Polytopen  $P$ , wenn die jeweilige Darstellung polynomial in der Dimension von  $P$  beschränkt ist.

### 7.1 Lemma

Sei  $P$  ein  $\mathcal{V}$ - oder  $\mathcal{H}$ -Polytop. Dann kann effizient entschieden werden, ob

- a) die Darstellung von  $P$  irredundant ist.
- b)  $P$  symmetrisch ist. Außerdem kann das Zentrum eines symmetrischen  $P$  effizient bestimmt werden.

BEWEIS: siehe Übung 5.1 □

Für den Rest des Abschnitts sei  $\mathbb{M}$  ein Minkowski-Raum mit Einheitskugel  $\mathbb{B}$ . Ist  $\mathbb{B}$  ein  $\mathcal{V}$ -Polytop so nehmen wir an, dass

$$\mathbb{B} = \text{conv}\{z^1, \dots, z^n\}, \quad z^1, \dots, z^n \in \mathbb{M}$$

eine irredundante Darstellung ist. Ist  $\mathbb{B}$  ein  $\mathcal{H}$ -Polytop, so nehmen wir an, dass

$$\mathbb{B} = \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{M} : \langle y^i, x \rangle \leq 1\}, \quad y^1, \dots, y^n \in \mathbb{M}^*$$

eine irredundante Darstellung ist.

Ferner sei  $P \subset \mathbb{M}$  ein  $\mathcal{V}$ - bzw.  $\mathcal{H}$ -Polytop,

$$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^m\}, \quad v^1, \dots, v^m \in \mathbb{M}$$

bzw.

$$P = \bigcap_{i=1}^m \{x : \langle u^i, x \rangle \leq \alpha_i\}, \quad u^1, \dots, u^m \in \mathbb{M}^*, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R},$$

jeweils irredundant.

## 7.2 Satz

a) Der Inradius  $r_d(P)$  kann in polynomialer Zeit bestimmt werden, wenn

- (i)  $\mathbb{B}$  und  $P$   $\mathcal{V}$ -Polytope.
- (ii)  $\mathbb{B}$  und  $P$   $\mathcal{H}$ -Polytope.
- (iii)  $\mathbb{B}$   $\mathcal{V}$ - und  $P$   $\mathcal{H}$ -Polytop.

b) Der Umradius  $R_d(P)$  kann in polynomialer Zeit bestimmt werden, wenn

- (i)  $P$  und  $\mathbb{B}$   $\mathcal{V}$ -Polytope.
- (ii)  $P$  und  $\mathbb{B}$   $\mathcal{H}$ -Polytope.
- (iii)  $P$   $\mathcal{V}$ - und  $\mathbb{B}$   $\mathcal{H}$ -Polytop.

BEMERKUNG: Man beachte, dass wir in Satz 7.2 die Einheitskugel  $\mathbb{B}$  sogar als Teil des Inputs zulassen. Bei den standard Containment Problemen ist die Familie  $\mathcal{C}^d$  zuvor fixiert, was das algorithmische Problem jedoch höchstens einfacher macht.

BEWEIS:

a) Gesucht ist der maximale Dilatationsfaktor  $\rho$ , sodass  $c + \rho\mathbb{B} \subset P$  für ein  $c \in \mathbb{M}$ .

- (i) Im Falle, dass beide Polytope in  $\mathcal{V}$ -Darstellung gegeben sind, müssen  $\rho$  und  $c$  so bestimmt werden, dass  $\rho z^i + c$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  Konvexkombination der  $v^j$ ,  $j = 1, \dots, m$  sind. Mit  $\rho, c$  und den Koeffizienten der Konvexkombinationen  $\lambda_{ij}$  als Variablen ergibt sich das folgende LP:

$$\begin{aligned} \max \quad & \rho \\ \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} v^j - \rho z^i - c &= 0 & i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} &= 1 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_{ij} &\geq 0 & i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

(ii),(iii) Ist  $P$  in  $\mathcal{H}$ -Darstellung gegeben, so ist nach Korollar 6.20 (b)

$$r_d(P) = \max_{c \in \mathbb{M}} \min_{j=1, \dots, m} \frac{\alpha_j - \langle u^j, c \rangle}{\|u^j\|^*}.$$

Sind die  $\|u^j\|^*$  bekannt, so ergibt sich also das folgende LP mit  $c$  und  $\rho$  als Variablen:

$$\begin{aligned} \max \quad & \rho \\ \langle u^j, c \rangle + \|u^j\|^* \rho & \leq \alpha_j \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Nach Definition der konjugierten Norm ist  $\|u^j\|^* = \max_{x \in \mathbb{B}} \langle u^j, x \rangle$ . Ist  $\mathbb{B}$  in  $\mathcal{H}$ -Darstellung gegeben, ist dies aber ein LP und ist  $\mathbb{B}$  in  $\mathcal{V}$ -Darstellung gegeben, so ist  $\|u^j\|^* = \max_{i=1, \dots, n} \langle u^j, z^i \rangle$ .

b) Nun suchen wir das kleinstmögliche  $\rho$ , sodass  $P \subset c + \rho \mathbb{B}$  für ein  $c \in \mathbb{M}$ .

(i) Sind  $\mathbb{B}$  und  $P$  in  $\mathcal{V}$ -Darstellung gegeben, so erhalten wir analog zu Teil a) (i) das Programm

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho \\ \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \rho z^i + c & = v^j \quad j = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} & = 1 \quad j = 1, \dots, m \\ \lambda_{ij} & \geq 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

welches wegen den Produkten  $\lambda_{ij} \rho$  nun aber nicht linear ist. Durch die Transformation  $\mu_{ij} = \rho \lambda_{ij}$  erhalten wir dann aber wieder ein LP (in den Variablen  $\rho, c, \mu_{ij}$ ):

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho \\ \sum_{i=1}^n \mu_{ij} z^i + c & = v^j \quad j = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n \mu_{ij} - \rho & = 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \mu_{ij} & \geq 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

(ii),(iii) Ist  $\mathbb{B}$  ein  $\mathcal{H}$ -Polytop, so ist  $P \subset c + \rho \mathbb{B}$  äquivalent zu  $\langle y^i, x - c \rangle \leq \rho$  für alle  $x \in P$ , was durch sortieren der Variablen nach links und ersetzen von 'für alle  $x \in P$ ' durch ' $\max_{x \in P}$ ' in folgende Gestalt gebracht werden kann:

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho \\ \rho + \langle y^i, c \rangle & \geq \max_{x \in P} \langle y^i, x \rangle \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Falls die  $\delta_i = \max_{x \in P} \langle y^i, x \rangle$  bestimmbare Konstanten sind, ist dies wieder ein LP. Offensichtlich ist aber  $\delta_i$  im Falle, dass  $P$  ein  $\mathcal{H}$ -Polytop ist selber Lösung eines LPs. Falls  $P$  ein  $\mathcal{V}$ -Polytop ist, gilt  $\delta_i = \max_{j=1, \dots, m} \langle y^i, v^j \rangle$ .

□

**BEMERKUNG:** Die In- und Umkugelradien in  $l_p$ -Räumen sind im allgemeinen nicht rational. Es kann sogar gezeigt werden, dass es oftmals kein Polynom  $\pi$  gibt, sodass  $\pi(r_d)$  bzw.  $\pi(R_d)$  rational wird (siehe [9]). Eine exakte Berechnung ist daher im binären Turingmaschinenmodell im allgemeinen nicht möglich.

### 7.3 Satz

Ist  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_p^d$ ,  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , so kann der

- a) Inradius  $r_d(P)$  eines  $\mathcal{H}$ -Polytops  $P$  in polynomialer Zeit (mit beliebiger Genauigkeit) approximiert werden.
- b) Umradius  $R_d(P)$  eines  $\mathcal{V}$ -Polytops  $P$  in polynomialer Zeit approximiert werden. Ist  $p = 2$ , so kann  $R_d(P)^2$  exakt bestimmt werden.

**BEWEIS:**(Skizze!) Sei  $q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , sodass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

- a) Wie bereits im Beweis zu Satz 7.2 (a) gezeigt wurde, kann der Inradius als Optimum des folgenden LPs erhalten werden:

$$\max \rho$$

$$\langle u^j, c \rangle + \|u^j\|_q \rho \leq \alpha_j \quad j = 1, \dots, m.$$

Leider ist  $\|u^j\|_q$  im allgemeinen nicht rational, sodass wir diese Werte rational approximieren müssen. Allerdings kann man zeigen, dass eine in Abhängigkeit von der Kodierungslänge von  $P$  gewählte Approximationsgüte der  $\|u^j\|_q$  zu einem beliebig kleinen additiven Fehler in der Approximation der optimalen Lösung des LPs führt (siehe [12]).

- b) Das Minimum der konvexen Kontraktion  $\Phi$  aus Lemma 6.19 kann mithilfe des Ellipsoid-Algorithmus in polynomialer Zeit approximiert werden (die  $\varphi_z$  sind differenzierbar und man erhält daher einen Subgradienten von  $\Phi(x)$  indem man eine Ecke  $z^j$  von  $P$  bestimmt, sodass  $\Phi(x) = \varphi_{z^j}(x)$  und dann den Gradienten von  $\varphi_{z^j}(x)$  bestimmt). Ist  $p = 2$  so ist  $R_d(P)^2$  immer rational und daher kann bei einer (in Abhängigkeit von der Kodierungslängen von  $P$ ) ausreichenden Approximationsgüte das exakte Optimum durch Rundung erhalten werden.

□

BEMERKUNG:

- a) Wie man anhand des Beweises zu Satz 7.3 sieht, ist der Inradius exakt berechenbar (und das für ganz allgemeine Minkowski-Räume), wenn man fordert, dass die  $u^j$  der  $\mathcal{H}$ -Darstellung alle normiert sind. Die Problematik der Bestimmung der konjugierten Norm und die Rundung der evtl. auftretenden irrationalen Werte wird dadurch dem Anwender zugeschoben.
- b) Die polynomiale Berechenbarkeit (des Quadrats) des Umkugelradius von  $\mathcal{V}$ -Polytopen  $P$  folgt auch aus der Tatsache, dass das nicht-lineare Programm

$$\begin{array}{ll} \min \rho & \\ \|c - v^j\|_2 \leq \rho & j = 1, \dots, m \\ c \in \mathbb{R}^d & \\ \rho \in \mathbb{R} & \end{array}$$

als Second Order Cone Problem (SOCP) darstellbar ist (siehe [23]). SOCP Probleme können allgemein in polynomialer Zeit approximiert werden und es gibt verschiedene brauchbare Tools die dies auch tun.

- c) Die Verwendbarkeit des Ellipsoid Algorithmus ist nicht auf die  $l_p$ -Normen beschränkt. Vielmehr kann der Umkugelradius in ganz allgemeinen Minkowski-Räumen mithilfe des Ellipsoid Algorithmus gelöst werden, wenn man in der Lage ist die folgenden drei Aufgaben zu bewältigen:
- (i) Bestimmung der Norm  $\|x\|$  eines gegebenen Vektors  $x$ .
  - (ii) Bestimmung eines Subgradienten von  $\Phi(x)$  für ein gegebenes  $x$ .
  - (iii) Bestimmung einer oberen Schranke der euklidischen Norm aller auftretenden Subgradienten.

Ein Beispiel jenseits der polytopalen Einheitskugeln und der  $l_p$ -Räume ist etwa der Schnitt euklidischer Kugeln mit Mittelpunkten  $c^i$  und  $-c^i$ , wobei  $\|c^i\|_2 < 1$  sei.

#### 7.4 Satz

- a) Ist  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_p^d$ ,  $p \in \mathbb{N}$  oder  $\mathbb{B}$  ein  $\mathcal{V}$ -Polytop (ansonsten Teil des Inputs), so ist die Bestimmung einer unteren Schranke  $\lambda$  für den Umradius  $R_d(P)$  eines  $\mathcal{H}$ -Polytops  $P$  NP-schwer.
- b) Ist  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_p^d$ ,  $p \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$  oder  $\mathbb{B}$  ein  $\mathcal{H}$ -Polytop (ansonsten Teil des Inputs), so ist die Bestimmung einer oberen Schranke  $\lambda$  für den Inradius  $r_d(P)$  eines  $\mathcal{V}$ -Polytops  $P$  NP-schwer.

BEWEIS: Teil (a) folgt direkt aus Satz 4.9 (bei  $\mathcal{V}$ -polytopaler Einheitskugel mit  $p = 1$ ) und Teil (b) dann aus Teil (a) durch Polarisierung und Lemma 6.4 (c).  $\square$

## 8 Dicke und Durchmesser

Wir verwenden die gleiche Notation wie im vorherigen Abschnitt.

**Zur Erinnerung:** Die Bestimmung von Dicke bzw. Durchmesser bedeutet in der Sprache der Containment-Probleme, dass zu einem gegebenem Körper  $C$  (Einheitskugel des Minkowski-Raums) und einem gegebenem Polytop  $P$  ein optimaler Translationsvektor  $c$  und ein eindimensionaler Unterraum  $F$  gesucht ist, sodass  $c + (\rho C \cap F) \subset P$  bzw.  $P \subset c + F^\circ + \rho C$ .

Diese Aufgaben lassen sich sicherlich auch für asymmetrische und unterdimensionale  $C$  untersuchen, was aber wegen fehlender Anwendungen bisher nicht von Interesse war.

### 8.1 Satz

a) *Der Durchmesser  $2r_1(P)$  kann in polynomialer Zeit bestimmt werden, wenn*

- (i)  $\mathbb{B}$  und  $P$   $\mathcal{V}$ -Polytope.
- (ii)  $\mathbb{B}$   $\mathcal{H}$ -Polytop und  $P$   $\mathcal{V}$ -Polytop.
- (iii)  $\mathbb{B}$  und  $P$   $\mathcal{H}$ -Polytope.

b) *Die Dicke  $2R_1(P)$  kann in polynomialer Zeit bestimmt werden, wenn*

- (i)  $\mathbb{B}$  und  $P$   $\mathcal{V}$ -Polytope.
- (ii)  $\mathbb{B}$   $\mathcal{H}$ -Polytop und  $P$  symmetrisches  $\mathcal{H}$ -Polytop.
- (iii)  $\mathbb{B}$   $\mathcal{V}$ -Polytop und  $P$   $\mathcal{H}$ -Polytop.

BEWEIS:

a) Nach Lemma 6.5 und 6.11 gilt  $2r_1(P) = r_1(P - P) = R_d(P - P)$ . Ist  $P$  ein  $\mathcal{V}$ -Polytop so kann eine (irredundante)  $\mathcal{V}$ -Darstellung von  $P - P$  effizient erzeugt werden. D.h. die Aussagen (i) und (ii) folgen aus Satz 7.2 (b).

Es bleibt also nur noch Teil (iii) zu zeigen. Nach Korollar 6.12 ist  $2r_1(P) = \max_{s^* \in \mathbb{S}^*} b_{s^*}(P)$ . Nun ist aber  $\varphi_x$  mit  $\varphi_x(s^*) = \langle s^*, x \rangle$  für jedes feste  $x$  ein lineares Funktional. Also nimmt  $\varphi_x$  sein Maximum an einer der Ecken des Polytops  $\mathbb{B}^*$  an, welche nach Korollar 1.10 gerade die  $y^i$  sind. Folglich

ist  $2r_1(P) = \max_{i=1,\dots,n} \beta_i$ , wobei  $\beta_i := \max_{x,x' \in P} \langle y^i, x - x' \rangle$ . Ist  $P$  ein  $\mathcal{H}$ -Polytop, so ergibt sich daher ein LP über dem  $\mathcal{H}$ -Polytop  $P \times P$ .

(Ist  $P$  ein  $\mathcal{V}$ -Polytop, so ist  $\beta_i = \max_{j_1, j_2} \langle y^i, v^{j_1} - v^{j_2} \rangle$ , also eine Lösungsalternative für Teil (ii)).

- b) Da die affine Hülle von  $P$  effizient bestimmt werden kann, nehmen wir oBdA an, dass  $P$  volldimensional ist (andernfalls ist  $R_1(P) = 0$ ). Wieder kann im Falle eines  $\mathcal{V}$ -Polytops  $P$  effizient eine  $\mathcal{V}$ -Darstellung von  $P - P$  bestimmt werden. Ist  $P$  ein symmetrisches  $\mathcal{H}$ -Polytop, so kann wegen Lemma 7.1 das Zentrum  $c$  von  $P$  in polynomialer Zeit bestimmt werden und damit leicht eine  $\mathcal{V}$ -Darstellung von  $(P - c)^\circ$ . Wegen Lemma 6.11 gilt  $2R_1(P) = R_1(P - P)$ . Teil (i) und (ii) folgen nun entweder mittels Lemma 6.5 und Satz 7.2 (a) oder mithilfe von Lemma 6.4(c) und Teil (a,i) und (a,iii).

Bleibt noch der Fall (iii) zu zeigen. Nach Lemma 6.13 ist aber  $2R_1(P) \geq \rho$ , genau dann wenn für alle  $t \in \mathbb{M}$ ,  $\|t\| \leq \rho$  ein  $x \in P \cap (P + t)$  existiert. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\rho \mathbb{B} \subset \{t \in \mathbb{M} : \exists x \in \mathbb{M} : \langle u^j, x \rangle \leq \min\{\alpha_j, \alpha_j + \langle u^j, t \rangle\}, j = 1, \dots, m\}.$$

Es ergibt sich daher das LP

$$\begin{array}{ll} \max \rho & \\ \langle u^j, x \rangle & \leq \alpha_j \quad j = 1, \dots, m \\ \langle u^j, x \rangle - \langle u^j, z^i \rangle \rho & \leq \alpha_j \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m . \\ x & \in \mathbb{R}^d \\ \rho & \in \mathbb{R} \end{array}$$

□

**BEMERKUNG:** Das Erzeugen irredundanter Darstellungen sollte im Einzelfall kontrolliert werden. Manchmal ist der Aufwand für die Identifizierung irrelevanter Daten deutlich größer als der Zeitverlust in den obigen Algorithmen durch mitschleppen redundanter Informationen.

**Notation:**  $\alpha^\infty := \alpha$ .

## 8.2 Satz

Seien  $p, q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , sodass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_p^d$ . Dann kann

- a) die  $p$ -te Potenz des Durchmessers  $2r_1(P)$

(i) eines  $\mathcal{V}$ -Polytops  $P \subset \mathbb{R}_p^d$  für  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

- (ii) eines  $\mathcal{H}$ -Polytops  $P \subset \mathbb{R}_p^d$  für  $p = \infty$
- b) die  $q$ -te Potenz der Dicke  $2R_1(P)$ 
  - (i) eines symmetrischen  $\mathcal{H}$ -Polytops  $P \subset \mathbb{R}_p^d$  für  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
  - (ii) eines  $\mathcal{V}$ - oder  $\mathcal{H}$ -Polytops  $P \subset \mathbb{R}_p^d$  für  $p = 1$

in polynomialer Zeit bestimmt werden.

BEWEIS: Folgt aus Lemma 4.1, 6.4(c), 6.8 und Satz 8.1. □

### 8.3 Satz

- a) Ist  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_p^d$ ,  $p \in \mathbb{N}$  oder  $\mathbb{B}$  ein  $\mathcal{V}$ -Polytop (ansonsten Teil des Inputs), so ist die Bestimmung einer unteren Schranke  $\lambda$  für  $r_1(P)^p$  bzw.  $r_1(P)$  eines  $\mathcal{H}$ -Polytops  $P$   $\text{NP}$ -vollständig.
- b) Ist  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_p^d$ ,  $p \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$  oder  $\mathbb{B}$  ein  $\mathcal{H}$ -Polytop (ansonsten Teil des Inputs), so ist die Bestimmung einer oberen Schranke  $\lambda$  für  $R_1(P)^p$  bzw.  $R_1(P)$  eines  $\mathcal{V}$ -Polytops  $P$   $\text{NP}$ -vollständig.
- c) Ist  $\mathbb{M} = \mathbb{R}_p^d$ ,  $p \in \{2, \infty\}$  oder  $\mathbb{B}$  ein  $\mathcal{H}$ -Polytop (ansonsten Teil des Inputs), so ist die Bestimmung einer oberen Schranke  $\lambda$  für die Dicke  $R_1(P)^p$  bzw.  $R_1(P)$  eines  $\mathcal{H}$ -Polytops  $P$   $\text{NP}$ -vollständig.

Die Teile (a) und (b) gelten auch dann noch, wenn als Input nur symmetrische Polytope  $P$  zugelassen sind

BEWEIS: Die Zugehörigkeit zu  $\text{NP}$  folgt aus den möglichen Zertifikaten: zwei Ecken mit genügend großem Abstand im Falle des Durchmessers, eine Normale der genügend nahen parallelen Stützhyperebenen im Falle der Dicke. Da für symmetrische Polytope nach Lemma 6.5  $r_1(P) = R_d(P)$  und  $R_1(P) = r_d(P)$  gilt, folgen Teil (a) und (b) direkt aus Satz 7.4.

Zu Teil (c): Man zeigt die Schwere der Dickeberechnung von Simplexen (in  $\mathcal{V}$ - oder  $\mathcal{H}$ -Darstellung) mithilfe von Korollar 6.23 durch Transformation von PARTITION (siehe [11]). □

BEMERKUNG: Die Komplexität der Dickeberechnung von asymmetrischen  $\mathcal{H}$ -Polytopen in  $\mathbb{R}_p^d$  mit  $p \in (2, \infty)$  ist offen. Dies liegt wohl eher an algebraischen Problemen bei der Konstruktion der benötigten Transformation als der Möglichkeit der effizienten Lösbarkeit.

BEMERKUNG: Analog zu Satz 4.10 können mithilfe von Normwechseln Approximationsalgorithmen mit a-priori gegebenen Approximationsgüten für

Inradius		$l_1$	$l_2$	$l_\infty$
$\mathcal{V}$ – Polytope	symm.	$\mathbb{P}$	NP – vollst.	NP – vollst.
	allg.	$\mathbb{P}$	NP <sub>approx</sub> – vollst.	NP – vollst.
$\mathcal{H}$ – Polytope	symm.	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$
	allg.	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}_{\text{approx}}$	$\mathbb{P}$
Umradius		$l_1$	$l_2$	$l_\infty$
$\mathcal{V}$ – Polytope	symm.	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$
	allg.	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$
$\mathcal{H}$ – Polytope	symm.	NP – vollst.	NP – vollst.	$\mathbb{P}$
	allg.	NP – vollst.	NP – vollst.	$\mathbb{P}$
Dicke		$l_1$	$l_2$	$l_\infty$
$\mathcal{V}$ – Polytope	symm.	$\mathbb{P}$	NP – vollst.	NP – vollst.
	allg.	$\mathbb{P}$	NP – vollst.	NP – vollst.
$\mathcal{H}$ – Polytope	symm.	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$
	allg.	$\mathbb{P}$	NP – vollst.	NP – vollst.
Durchmesser		$l_1$	$l_2$	$l_\infty$
$\mathcal{V}$ – Polytope	symm.	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$
	allg.	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}$
$\mathcal{H}$ – Polytope	symm.	NP – vollst.	NP – vollst.	$\mathbb{P}$
	allg.	NP – vollst.	NP – vollst.	$\mathbb{P}$

Tabelle 1: Effizient und nicht effizient lösbare Radienberechnungsaufgaben

die vier Grundradien gewonnen werden (man beachte, dass in obiger Tabelle zu jedem Radius und jeder Darstellung von  $P$  mindestens ein  $\mathbb{P}$  existiert). Ebenfalls kann wieder gezeigt werden, dass die so gewonnenen Güten fast bestmöglich sind.

## 9 Die anderen Radien

Leider gibt es kaum positive Resultate zu den  $j$ -Radien mit  $j \notin \{1, d\}$ . Da es aber eine Reihe von Anwendungen gibt (meist aus anderen mathematischen Teildisziplinen) in denen diese Radien eine Rolle spielen, wollen wir in diesem Abschnitt zunächst einige negative Resultate festhalten und schließlich etwas zur Approximierbarkeit der äußeren  $j$ -Radien festhalten.

### 9.1 Satz

Für  $p \in \mathbb{N}$  und  $j \in \mathbb{N}$  (fest) ist jedes der folgenden Probleme in  $l_p$ -Räumen NP-schwer:

a) Für  $\mathcal{H}$ -Parallelotope  $P$

- (i) die untere Beschränkung von  $r_j(P)$ ,
- (ii) die obere Beschränkung von  $R_{d+1-j}(P)$ .

b) Für  $\mathcal{V}$ -Kreuzpolytope  $P$

- (i) die obere Beschränkung von  $R_j(P)$ ,
- (ii) die untere Beschränkung von  $r_{d+1-j}(P)$ .

c) Falls  $p \in \{2, \infty\}$  für  $\mathcal{V}$ - oder  $\mathcal{H}$ -Simplexe  $S$  die obere Beschränkung von  $R_j(S)$ .

BEWEIS:(Skizze!) Man beweist nur die Teile (a,i) und (c) direkt. Der Rest folgt dann mittels Lemma 6.4 (c) und Lemma 6.5. Zum Beweis von (a,i) bzw. (c) zeigt man, dass aus einem polynomialen Algorithmus zur Berechnung dieser Radien auch ein polynomialer Algorithmus zur Berechnung von  $r_1(P')$  bzw.  $R_1(S')$  folgen würde, wobei  $P'$  wieder ein beliebiges  $\mathcal{H}$ -Parallelotop und  $S'$  ein beliebiges  $\mathcal{V}$ - oder  $\mathcal{H}$ - Simplex ist. Dies geschieht mittels eines Lifting-Arguments, d.h. aus  $P'$  bzw.  $S' \subset \mathbb{R}_p^d$  wird ein  $P$  bzw.  $S \subset \mathbb{R}_p^{d+j-1}$  konstruiert, sodass  $r_j(P) = r_1(P')$  bzw.  $R_j(S) = R_1(S')$  (siehe [11]). Wegen Satz 8.3 würde das aber  $\mathbb{P} = \text{NP}$  bedeuten.  $\square$

Die obigen Resultate können noch etwas verallgemeinert werden, vor allem in der Hinsicht, dass man  $j$  als Funktion mit  $d$  wachsen lässt. Ein für die

Anwendung wichtiger Fall ist in Satz 9.1 allerdings offen geblieben: Die obere Beschränkung des äußeren  $(d-1)$ -Radius von  $\mathcal{V}$ -Polytopen. Zumindest im euklidischen Fall können wir diese Lücke mithilfe von Bemerkung 6.14 schließen:

## 9.2 Satz

Das folgende Problem ONE-SHOT ist NP-schwer:

INPUT:  $c^1, \dots, c^n \in \mathbb{R}_2^d, \lambda \in \mathbb{R}$ .

FRAGE: Existiert eine Gerade, die alle Kugeln

$$B^i = \{x \in \mathbb{R}_2^d : \|x - c^i\|_2^2 \leq \lambda\}, i = 1, \dots, n \text{ schneidet?}$$

BEMERKUNG: Man beachte, dass sich in unserer üblichen Darstellung  $B^i = c^i + \rho\mathbb{B}$  wegen  $\rho = \sqrt{\lambda}$  evtl. irrationale  $\rho$  ergeben (die wir nicht kodieren könnten).

BEWEIS: Zum Beweis der Schwere geben wir eine Transformation von 3-SAT an. Sei dazu  $I = (n, m, S, \mathcal{C})$  eine Instanz von 3-SAT mit  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  und  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ . O.E. kann angenommen werden, dass jedes  $C_i$  aus drei verschiedenen Variablen besteht.

Sei  $d = n + 1$ ,  $X^d = \text{conv}\{\pm e^1, \dots, \pm e^d\}$  das reguläre Kreuzpolytop und  $\lambda = (d-1)/d$ . Ferner sei  $B_+^i = \{x : \|x - e^i\|_2^2 \leq \lambda\}$ ,  $B_-^i = \{x : \|x + e^i\|_2^2 \leq \lambda\}$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Dann folgt  $B_+^i \cap B_-^i = \emptyset$ ,  $i = 1, \dots, d$  und für jeden Vektor  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$  mit  $\sigma_i \in \{+, -\}$ ,  $i = 1, \dots, d$  ist  $q_\sigma := 1/d \left( \sum_{i=1}^d \sigma_i e^i \right)$  das eindeutige Element in  $\bigcap_{i=1}^d B_{\sigma_i}^i$ . Folglich schneiden genau die  $2^{d-1}$  Geraden  $l_{\pm\sigma} = \text{aff}\{q_{-\sigma}, q_\sigma\}$  alle Kugeln  $B_+^i$  und  $B_-^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Seien nun  $\bar{B}^j = \{x : \|x - p^j\|_2^2 \leq \lambda\}$ , wobei die  $p^j$ ,  $j = 1, \dots, m$  wie folgt definiert werden: Sei zunächst  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sodass  $(12 - 4/d)\alpha^2 < \lambda < 12\alpha^2$ . Dann setze

$$p_{n+1}^j = 3\alpha \quad \text{und} \quad p_i^j = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } s_i \in C_j, \\ -\alpha, & \text{falls } \bar{s}_i \in C_j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, m. \end{matrix}$$

Wir zeigen, dass  $I = (n, m, S, \mathcal{C})$  eine Ja-Instanz von 3-SAT ist, genau dann wenn eine Gerade existiert, die alle Kugeln  $B_{\pm}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  und  $\bar{B}^j$ ,  $j = 1, \dots, m$  schneidet.

Sei zunächst  $I = (n, m, S, \mathcal{C})$  eine Ja-Instanz. Setze  $\sigma_i = +$ , falls  $s_i$  wahr,  $\sigma_i = -$ , falls  $s_i$  falsch,  $i = 1, \dots, n$  und  $\sigma_{n+1} = +$ . Natürlich schneidet die Gerade  $l_{\pm\sigma}$  alle Kugeln  $B_+^i$  und  $B_-^i$ . Bezeichnet  $\tau_j$  die Anzahl der wahren

Literale in  $C_j$ , so ist der Abstand zwischen  $l_{\pm\sigma}$  und  $p^j$  das Minimum der quadratischen Funktion

$$f_j(\mu) = \|p^j - \mu q_\sigma\|_2^2 = \tau_j(\alpha - \mu)^2 + (3 - \tau_j)(\alpha + \mu)^2 + (n - 3)\mu^2 + (3\alpha - \mu)^2.$$

Mittels Kurvendiskussion zeigt man leicht, dass das Minimum von  $f_j$  bei  $\mu_j^* = 2\tau_j\alpha/d$  liegt und  $f_j(\mu_j^*) = (12 - 4\tau_j^2/d)\alpha^2$  ist. Da nach Annahme  $\tau_j \geq 1$  gilt, folgt, dass  $f_j(\mu_j^*) < \lambda$ , und daher schneidet  $l_{\pm\sigma}$  auch alle Kugeln  $\bar{B}^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Existiert nun andererseits eine Gerade die alle Kugeln schneidet, so muss das nach unseren Vorüberlegungen eine der  $l_{\pm\sigma}$  sein. Sei o.E.  $\sigma_{n+1} = +$ . Dann setze  $s_i$  wahr, falls  $\sigma_i = +$  und  $s_i$  falsch, falls  $\sigma_i = -$ . Da  $l_{\pm\sigma}$  die Kugel  $\bar{B}^j$  schneidet, kann das Minimum der Funktion  $f_j(\mu)$  nicht größer als  $\lambda$  sein. Das ist nach Wahl von  $\alpha$  aber nur möglich wenn  $\tau_j \geq 1$  gilt.  $\square$

**BEMERKUNG:** Auch Satz 9.2 kann wiederum auf  $R_{d-k}$  mit konstantem  $k$  verallgemeinert werden [13].

Auf der positiven Seite gibt es nur wenig nutzbares und das fast ausschließlich für  $\mathcal{V}$ -Polytope im euklidischen Raum:

- a) Für feste  $d$  kann der äußere  $j$ -Radius theoretisch in polynomialer Zeit berechnet werden [6]. Für die Praxis ist dieses Resultat aber absolut unbrauchbar.
- b) In [22] wird der äußere  $j$ -Radius zunächst als nicht-lineares Optimierungsproblem formuliert und dann durch ein Semidefinites Programm relaxiert (untere Schranke). Durch eine teilweise randomisierte Rundungsprozedur des relaxierten Ergebnis erhält man schließlich eine Approximation des äußeren  $j$ -Radius, die maximal  $O(\sqrt{\log(n)})$  vom Optimum abweicht. Für  $j = 1$  folgt aus [5] das auch kaum noch bessere Gütegarantien zu erwarten sind.

Implementationen besitzen gute Laufzeiten, die Approximationsgüte der Resultate ist im allgemeinen aber nicht zufriedenstellend.

- c) Eine Familie von Algorithmen ( $\mathcal{A}(\varepsilon); \varepsilon > 0$ ) heißt *Polynomial Time Approximation Scheme (PTAS)* zu einem gegebenem Minimierungsproblem mit optimalem Zielfunktionswert  $\omega^*$ , wenn für jedes feste  $\varepsilon$  der Algorithmus  $\mathcal{A}(\varepsilon)$  in polynomialer Zeit eine zulässige Lösung  $x$  mit Zielfunktionswert  $\omega \leq (1 + \varepsilon)\omega^*$  bestimmt. Ist die Laufzeit auch in Abhängigkeit von  $1/\varepsilon$  polynomial, so spricht man von einem *Fully Polynomial Time Approximation Scheme (FPTAS)*

In [16] wird ein PTAS für  $R_{d-k}$  mit konstantem  $k$  angegeben. Die Laufzeitkonstanten in Abhängigkeit von  $1/\varepsilon$  sind aber so schlecht, dass schon für  $k = 1$  keine sinnvollen Laufzeiten zu erwarten sind ( $dn^{O(1/\varepsilon^5 \log(1/\varepsilon))}$ ).

## 10 Multiples Containment unter Homothetie

### 10.1 Lemma

Sei  $\mathbb{M} = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$  ein Minkowski-Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $\mathbb{B}$  ist ein Parallelotop
- (ii) Ist  $A \subset \mathbb{M}$  und  $\rho \geq 0$ , sodass für jedes Paar  $a^1, a^2 \in A$  der Schnitt  $(a^1 + \rho\mathbb{B}) \cap (a^2 + \rho\mathbb{B}) \neq \emptyset$ , dann gilt  $\bigcap_{a \in A} (a + \rho\mathbb{B}) \neq \emptyset$ .
- (iii)  $r_1(K) = R_d(K)$  für alle Körper  $K \subset \mathbb{M}$ .

BEWEIS: Es genügt die Äquivalenz der Teile (i) und (iii) zu zeigen, da die Äquivalenz der Aussagen (ii) und (iii) direkt aus Bemerkung 6.14 folgt. Sei zunächst  $\mathbb{B}$  ein Parallelotop,  $\mathbb{B} = \bigcap_{i=1}^d \{x \in \mathbb{M} : \langle \pm y^i, x \rangle \leq 1\}$  mit linear unabhängigen  $y^1, \dots, y^d \in \mathbb{M}^*$  und  $K \subset \mathbb{M}$  ein beliebiger Körper. Mit  $v^i, w^i \in K$ , sodass

$$\max_{v, w \in K} \langle y^i, v - w \rangle = \langle y^i, v^i - w^i \rangle, \quad i = 1, \dots, d,$$

seien  $\alpha_i := \frac{1}{2} \langle y^i, v^i + w^i \rangle$  und  $c \in \mathbb{M}$ , sodass  $\bigcap_{i=1}^d H_{y^i, \alpha_i} = \{c\}$ . Nach Korollar 6.12 ist

$$2r_1(K) = \max_{s^* \in \mathbb{S}^*} b_{s^*}(K) = \max_{i=1, \dots, d} \langle y^i, v^i - w^i \rangle.$$

Andererseits gilt offensichtlich, dass  $c + \frac{1}{2} \max_{i=1, \dots, d} \langle y^i, v^i - w^i \rangle \mathbb{B} \supset K$  und daher  $R_d(K) \leq r_1(K)$ . Da nach Lemma 6.5 grundsätzlich  $R_d(K) \geq r_1(K)$  gilt, folgt insgesamt die Gleichheit der beiden Radien.

Ist  $\mathbb{B}$  ein Polytop aber kein Parallelotop, so folgt, dass  $\mathbb{B} = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{M} : \langle \pm y^i, x \rangle \leq 1\}$  mit  $m \geq d + 1$  gilt. O.E. kann angenommen werden, dass je  $d$  der  $y^i$  linear unabhängig sind (sonst kann die nachfolgende Betrachtung in einer niedrigeren Dimension durchgeführt werden). Es folgt  $-y^{d+1} = \sum_{i=1}^d \lambda_i y^i$  mit  $\lambda_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Da mit  $y^i$  auch immer  $-y^i$  Facettennormale von  $\mathbb{B}$  ist, kann sogar von  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, d$  ausgegangen werden. Es folgt  $-y^{d+1} \in \text{int}\{\text{pos}\{y^1, \dots, y^d\}\}$ . Letzteres bedeutet aber, dass  $S = \bigcap_{i=1}^{d+1} \{x \in \mathbb{M} : \langle y^i, x \rangle \leq 1\}$  ein  $d$ -Simplex mit  $0 \in \text{int}(S)$  ist. Sei nun  $T = \text{conv}\{a^1, \dots, a^{d+1}\} \subset \mathbb{B}$  ein  $d$ -Simplex, sodass  $a^i$  im relativen Inneren

der Facette von  $S$  mit  $y^i$  als Normale liegt. Dann folgt aber offensichtlich  $R_d(T) = 1$  und  $r_1(T) < 1$ , da andernfalls parallele Stützhyperebenen an  $\mathbb{B}$  durch  $a^i$  und  $a^j$  existieren müssten.

Die Aussage für nicht-polytopale  $\mathbb{B}$  folgt schließlich mithilfe der beliebig genauen Approximierbarkeit von  $\mathbb{B}$  durch Polytope, (kann aber auch direkt oben eingearbeitet werden).  $\square$

## 10.2 Definition

a) Sei  $\mathbb{M} = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$  ein Minkowski-Raum und  $A \subset \mathbb{M}$ . Dann ist

$$R_d^k(A) := \min\{\rho \geq 0 : \forall a \in A \exists c^l \in \mathbb{M}, l \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } a \in c^l + \rho\mathbb{B}\}$$

der  $k$ -center Radius von  $A$ .

b) Sei  $(\mathbb{M}^d; d \in \mathbb{N})$  eine Folge  $d$ -dimensionaler Minkowski-Räume. Das folgende Problem heißt  $k$ -CENTER:

INPUT:  $d \in \mathbb{N}$ ,  $A \subset \mathbb{M}^d$  endlich.

FRAGE: Existieren  $c^1, \dots, c^k \in \mathbb{M}^d$ , sodass es für alle  $a \in A$  ein  $l \in \{1, \dots, k\}$  mit  $a \in c^l + \mathbb{B}$  gibt?

BEMERKUNG:

a) Offensichtlich ist  $R_d^1(A) = R_d(A) = R_d(\text{conv}(A)) \geq R_d^2(A) \geq R_d^3(A) \geq \dots$

b) Für  $k \geq 2$  ist im allgemeinen  $R_d^k(A) \neq R_d^k(\text{conv}(A))$ .

## 10.3 Satz

a) Sei  $\mathbb{M}^d = \mathbb{R}_\infty^d$ . Ist  $k \leq 2$ , dann ist  $k$ -CENTER  $\in \mathbb{P}$ , andernfalls ist  $k$ -CENTER NP-vollständig.

b) Sei  $\mathbb{M}^d = \mathbb{R}_2^d$  und  $k \geq 2$ . Dann ist  $k$ -CENTER NP-vollständig.

BEWEIS:

a) Wir zeigen, dass das Problem für alle  $k \in \mathbb{N}$  äquivalent zur  $k$ -Färbbarkeit von Graphen ist. Da die  $k$ -Färbbarkeit für  $k \leq 2$  polynomial durchführbar, für  $k \geq 3$  aber NP-vollständig ist, folgt dann die Behauptung.

Zu einer gegebenen  $k$ -CENTER Instanz  $(d, A)$  konstruieren wir zunächst den folgenden Graphen:  $G = (A, E)$  mit  $\{a^1, a^2\} \in E$ , genau dann wenn  $\|a^1 - a^2\|_\infty > 2$ . Eine Kante in  $G$  bedeutet also, dass die zugehörigen

Knoten durch verschieden Einheitswürfel überdeckt werden müssen; jede kantenfreie Knotenmenge kann nach Lemma 10.1 aber mit dem gleichen Würfel überdeckt werden. Die Überdeckung von  $A$  durch  $k$  Kopien des Einheitswürfels ist also genau dann möglich, wenn  $G$  ein  $k$ -färbbarer Graph ist (Die Bestimmung der Mittelpunkte der einzelnen Partitionen kann dann wie in Lemma 10.1 erfolgen).

Sei andererseits  $G = (V, E)$  ein Graph, o.E.  $V = \{1, \dots, n\}$ . Für  $i = 1, \dots, n$  seien  $a^i \in \mathbb{R}_\infty^n$  mit  $a_i^i = -1$ ,  $a_j^i = 2$ , falls  $\{i, j\} \in E$  und sonst  $a_j^i = 0$ . Offensichtlich ist dann  $\|a^i - a^j\|_\infty > 2$ , genau dann wenn  $\{i, j\} \in E$ . Der Graph ist also  $k$ -färbbar, genau dann wenn  $a^1, \dots, a^n$  durch  $k$  Einheitswürfel überdeckbar sind.

b) Fast analog zu Satz 9.2 [18].

□

BEMERKUNG:

- a) In  $\mathbb{R}_\infty^d$  kann die Bestimmung von  $R_d^2(A)$  wegen Satz 10.3 mithilfe einer oberen Schranke und binärer Suche in polynomialer Zeit durchgeführt werden.
- b) Als gemeinsame Verallgemeinerung der äußeren  $j$ -Radien und der  $k$ -center Radien definiert man auch

$$R_j^k(A) := \min \{ \rho \geq 0 : \forall a \in A \exists F_l \text{ (} d - j \text{)-dimensionaler affiner Unterraum, } l \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } a \in F_l + \rho \mathbb{B} \}.$$

Vor allem der Fall  $j = d - 1$  hat als  $k$ -line center Problem einige Beachtung gefunden. Im euklidischen spricht man von projektiven Clustering Aufgaben.

- c) Bei Anwendungsproblemen im Bereich des optimalen Shape-Fittings können auch multiple Containment Probleme mit verschiedenen Containern (Kugeln und Zylinder / verschiedene Normen) auftreten.

## 11 Approximation und Core-Sets

In diesem Abschnitt wollen wir uns am Beispiel der euklidischen Umradiusberechnung ein neues Konzept zur Beschleunigung existierender geometrischer Optimierungsverfahren anschauen: Die Bestimmung von Core-Sets.

Der Begriff tauchte erst vor wenigen Jahren zum ersten mal auf, hat seitdem aber große Beachtung gefunden (die zugehörigen Originalreferenzen sind allerdings mit Vorsicht zu genießen).

Sei  $K \subset \mathbb{R}_2^d$  ein Körper und  $P \subset \mathbb{R}_2^d$  eine (endliche) Punktmenge (evtl. die Eckenmenge eines  $\mathcal{V}$ -Polytops),  $|P| = n$  und  $\varepsilon > 0$ .

### 11.1 Lemma

Sei  $c \in \mathbb{R}_2^d$  der Mittelpunkt der Umkugel von  $K$ .

- a) Zu jedem Halbraum  $H^+$  mit  $c \in H^+$  existiert ein  $v \in K$ , sodass  $v \in (c + R_d(K)\mathbb{S}) \cap H^+$  (vgl. Beweis zu Übung 5.3).
- b) Zu jedem  $q \in \mathbb{R}_2^d$  mit  $\|c - q\| = \delta$  existiert ein  $v \in K$ , sodass  $\|v - q\|^2 \geq R_d(K)^2 + \delta^2$ .

BEWEIS:

- a) Angenommen es existiert ein Halbraum  $H^+$ , sodass

$$c \in H^+ \text{ und } K \cap (c + R_d(K)\mathbb{S}) \cap H^+ = \emptyset.$$

O.E. sei  $c = 0$ ,  $R_d(K) = 1$  und  $H = H_{u,0}$  mit  $u \in \mathbb{R}_2^d$ ,  $\|u\| = 1$ . Da  $K$  und  $\mathbb{S} \cap H^+ =: S^+$  kompakt sind, existiert ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\forall x \in K$  und  $s \in S^+$  gilt  $\|x - s\| \geq \varepsilon$ . Ist  $\varepsilon$  genügend klein, gilt dann  $K \subset \text{conv}\{H_{u,\frac{\varepsilon}{2}}^- \cap \mathbb{B}, H^+ \cap (1 - \varepsilon)\mathbb{B}\} =: B$ . Um einen Widerspruch nachzuweisen genügt es also zu zeigen, dass  $R_d(B) < 1$ . Nun ist aber  $\|x + \varepsilon u/2\| < 1$  für alle  $x \in H_{u,\frac{\varepsilon}{2}}^- \cap \mathbb{B}$  und für alle  $x \in H^+ \cap (1 - \varepsilon)\mathbb{B}$ , also auch für alle  $x \in B$ .

- b) Folgt mit  $H$  orthogonal zu  $\text{aff}\{c, q\}$  durch  $c$  direkt aus Teil (a).

□

BEMERKUNG: Nach Satz 7.3 ist der Umkugelradius eines  $\mathcal{V}$ -Polytopes in polynomialer Zeit bestimmbar. Allerdings ist der dort verwendete Ellipsoid-Algorithmus wenig Praxis tauglich. Mithilfe von Lemma 11.1 kann aber ein recht schnelles FPTAS erzeugt werden:

### 11.2 Satz

In  $O(nd/\varepsilon^2)$  Schritten kann ein  $\bar{c} \in \mathbb{R}_2^d$  und ein  $\rho \leq (1 + \varepsilon)R_d(P)$  bestimmt werden, sodass  $P \subset \bar{c} + \rho\mathbb{B}$ .

BEWEIS: Der Algorithmus lautet wie folgt: Sei  $c^1 \in P$  beliebig und für  $i = 1, \dots, \lceil 1/\varepsilon^2 \rceil - 1$  sei  $v^i \in P$ , sodass  $\|c^i - v^i\| = \max_{x \in P} \|c^i - x\|$ . Setze

$$c^{i+1} = c^i + \frac{1}{i+1}(v^i - c^i).$$

Sei  $c$  der Mittelpunkt der Umkugel von  $P$ . Wir zeigen durch Induktion, dass  $\|c - c^i\| \leq R_d(P)/\sqrt{i}$ , woraus direkt die Behauptung des Satzes folgt.

Da  $c^1 \in P$  gilt natürlich  $\|c - c^1\| \leq R_d(P)$ . Wir nehmen nun an, dass  $\|c - c^i\| \leq R_d(P)/\sqrt{i}$  ist und zeigen die Richtigkeit der Aussage für  $i+1$ . Sei  $H$  die (eine, falls  $c = c^i$ ) Hyperebene senkrecht zu  $\text{aff}\{c, c^i\}$  mit  $c \in H$  und  $c^i \in H^-$ . Es folgt  $\|c^i - v\|^2 < R_d(P)^2 + \|c^i - c\|^2$  für alle  $v \in P \cap \text{int}(H^-)$ . Andererseits existiert nach Lemma 11.1 ein  $v \in P \cap H^+$  mit  $\|c^i - v\|^2 \geq \|c^i - c\|^2 + R_d(P)^2$ . Folglich ist  $v^i \in H^+$ . Wir unterscheiden die Fälle  $c^{i+1} \in H^+$  und  $c^{i+1} \in \text{int}(H^-)$ .

Ist  $c^{i+1} \in H^+$ , so wird  $\|c^{i+1} - c\|$  maximal, wenn  $c^i = c$  gilt. Durch einsetzen folgt daraus aber  $\|c^{i+1} - c\| \leq R_d(P)/\sqrt{i+1}$ .

Ist  $c^{i+1} \in \text{int}(H^-)$ , so wird  $\|c^{i+1} - c\|$  maximal, wenn  $\|c^i - c\|$  maximal wird und  $v^i \in H \cap R_d(P)\mathbb{S}$  gilt. Dann ist aber das Dreieck  $\text{conv}\{c, c^i, v^i\}$  rechtwinklig und es folgt mithilfe des Kathetensatz, dass  $c^{i+1}$  Fußpunkt der Höhe von  $c$  auf  $[c^i, v^i]$  ist. Folglich ist in diesem Fall

$$\|c - c^{i+1}\|^2 = \|c - c^i\|^2 - \|c^i - c^{i+1}\|^2 = \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i(i+1)}\right) R_d^2 = \frac{1}{i+1} R_d^2.$$

□

Nun zum eigentlichen Thema dieses Abschnitts:

### 11.3 Definition

Eine Menge  $S \subset P$  heißt  $\varepsilon$ -Core-Set von  $P$ , falls  $P \subset c_S + (1 + \varepsilon)R_d(P)\mathbb{B}$ , wobei  $c_S$  der Umkugelmittelpunkt von  $S$  ist.

BEMERKUNG:

- Da  $\bar{\rho}_S := \max_{v \in P} \|c_S - v\| \leq (1 + \varepsilon)R_d(P)$  für ein Core-Set  $S$  gilt, ist  $\bar{\rho}_S$  eine  $(1 + \varepsilon)$ -Approximation von  $R_d(P)$ .
- Nach Lemma 10.1 ist in  $\mathbb{R}_\infty^d$  jedes diametrale Paar von Punkten aus  $P$  ein  $\varepsilon$ -Core-Set für beliebige  $\varepsilon$ , das zusammen mit dem nötigen Mittelpunkt in  $O(nd)$  Schritten bestimmt werden kann.

### 11.4 Satz

Es existiert ein  $\varepsilon$ -Core-Set  $S \subset P$  mit  $|S| \leq \lceil 2/\varepsilon \rceil$ .

BEWEIS: Wir geben wieder zunächst die Konstruktion an: Sei dazu  $v^1 \in P$  beliebig und  $S_1 = \{v^1\}$ . Für  $i = 1, \dots, \lceil 2/\varepsilon \rceil$  seien (iterativ)  $\rho_i = R_d(S_i)$ ,  $c^i$  der zugehörige Mittelpunkt und  $\lambda_i = \rho_i/\bar{R}$ , wobei  $\bar{R} = (1 + \varepsilon)R_d(P)$ . Weiter

seien  $v^{i+1}$ , sodass  $\|c^i - v^{i+1}\| = \max_{v \in P} \|c^i - v\|$  und  $S_{i+1} = S_i \cup \{v^{i+1}\}$ . Schließlich sei

$$\bar{\rho} = \min_{i \in \{1, \dots, \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil\}} \|c^i - v^{i+1}\|.$$

Offensichtlich folgt aus  $\lambda_i > 1/(1 + \varepsilon)$  für ein  $i \geq 0$ , dass  $\rho_i > R_d(P)$  im Widerspruch zu  $S_i \subset P$ . Wir zeigen, dass aus der Annahme  $\bar{\rho} > \bar{R}$  aber  $\lambda_i > 1/(1 + \varepsilon)$  folgen würde.

Sei  $\gamma_i = \|c^i - c^{i+1}\|$ . Ist  $\gamma_i = 0$  für ein  $i < 2/\varepsilon$ , so folgt  $\|c^i - v^{i+1}\| = \rho_{i+1} \leq R_d(P)$ , im Widerspruch zur Annahme  $\|c^i - v^{i+1}\| > \bar{R}$ . Sei daher  $\gamma_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, \lceil 2/\varepsilon \rceil$  und  $H$  eine Hyperebene senkrecht zu  $\text{aff}\{c^i, c^{i+1}\}$ , sodass  $c^i \in H$  und  $c^{i+1} \in H^-$ . Nach Lemma 11.1 existiert ein  $s \in S_i \cap H^+$  mit  $\rho_{i+1}^2 \geq \|c^{i+1} - s\|^2 \geq \rho_i^2 + \gamma_i^2$ . Andererseits folgt mittels Dreiecksungleichung aus der Annahme  $\|c^i - v^{i+1}\| \geq \bar{R}$ , dass  $\rho_{i+1} \geq \bar{R} - \gamma_i$ . Insgesamt gilt also

$$\lambda_{i+1} = \frac{\rho_{i+1}}{\bar{R}} \geq \frac{1}{\bar{R}} \max \left\{ \bar{R} - \gamma_i, \sqrt{\rho_i^2 + \gamma_i^2} \right\}.$$

Da mit wachsendem  $\gamma_i$  auch  $\sqrt{\rho_i^2 + \gamma_i^2}$  wächst, aber  $\bar{R} - \gamma_i$  fällt, ist die untere Schranke für  $\lambda_{i+1}$  sicherlich am kleinsten, wenn  $\gamma_i$  gerade den Wert annimmt für den  $\bar{R} - \gamma_i = \sqrt{\rho_i^2 + \gamma_i^2}$  gilt. Durch quadrieren und auflösen nach  $\gamma_i$  ergibt sich

$$\gamma_i = \frac{(1 - \lambda_i^2)\bar{R}}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_{i+1} \geq \frac{1 + \lambda_i^2}{2}.$$

Sei nun  $\mu_i := 1/(1 - \lambda_i)$ , also  $\lambda_i = 1 - 1/\mu_i$ . Dann gilt

$$\mu_{i+1} \geq \frac{1}{1 - \frac{1 + (1 - \frac{1}{\mu_i})^2}{2}} = \frac{\mu_i}{1 - \frac{1}{2\mu_i}} = \mu_i \left( 1 + \frac{1}{2\mu_i} + \frac{1}{4\mu_i^2} + \dots \right) > \mu_i + \frac{1}{2}.$$

Da  $\lambda_1 = 0$  folgt  $\mu_1 = 1$  und daher  $\mu_i > 1 + i/2$ . Folglich ist

$$\lambda_i > 1 - \frac{1}{1 + i/2} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}, \text{ falls } i \geq \frac{2}{\varepsilon}.$$

□

### 11.5 Korollar

*Es kann in  $O(nd/\varepsilon + (1/\varepsilon)^5)$  Schritten ein  $\bar{c}$  mit  $\bar{c} + \rho\mathbb{B} \supset P$  bestimmt werden.*

BEWEIS: Durch Kombination der Algorithmen in Satz 11.2 und 11.4. □

BEMERKUNG: Es kann sogar die Existenz von Core-Sets der Größe  $\lceil 1/\varepsilon \rceil$  nachgewiesen werden. Allerdings ist deren Erzeugung algorithmisch deutlich aufwendiger. Mithilfe der  $j$ -dimensionalen Seiten regulärer Simplexe zeigt man schließlich, dass  $\lceil 1/\varepsilon \rceil$  eine untere Schranke für die Größe von Core-Sets ist.

## 12 Adaptive Ansätze

siehe Vorlesung – nicht Prüfungsrelevant!

### Literatur

- [1] M. Badoiu and K.L. Clarkson. Smaller core-sets for balls. In *Proc. 14th Annu. ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms*, pages 801–802, 2003.
- [2] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer, 1997.
- [3] H.L. Bodlaender, P. Gritzmann, V. Klee, and J. van Leeuwen. Computational complexity of norm-maximization. *Combinatorica*, 10(2):203–225, 1990.
- [4] T. Bonnesen and W. Fenchel. *Theorie der konvexen Körper*. Springer, 1974.
- [5] A. Brieden. On geometric optimization problems likely not contained in  $\text{APX}$ . *Discrete Comput. Geom.*, 28:201–209, 2002.
- [6] U. Faigle, W. Kern, and M. Streng. Note on the computational complexity of  $j$ -radii of polytopes in  $\mathbb{R}^n$ . *Math. Program.*, 73:1–5, 1996.
- [7] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. Freeman, 1979.
- [8] J.E. Goodman and J. O’Rourke. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, Boca Raton/NY (USA), 1997.
- [9] P. Gritzmann, L. Habsieger, and V. Klee. Good and bad radii of convex polygons. *SIAM J. Comput.*, 20(2):395–403, 1991.
- [10] P. Gritzmann and V. Klee. Inner and outer  $j$ -radii of convex bodies in finite-dimensional normed spaces. *Discrete Comput. Geom.*, 7:255–280, 1992.
- [11] P. Gritzmann and V. Klee. Computational complexity of inner and outer  $j$ -radii of polytopes in finite-dimensional normed spaces. *Math. Program.*, 59:163–213, 1993.
- [12] P. Gritzmann and V. Klee. On the complexity of some basic problems in computational convexity. I. Containment problems. *Discrete Math.*, 136:129–174, 1994.

- [13] P. Gritzmann and T. Theobald. On the computational complexity of stabbing problems in general dimension. in preparation.
- [14] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver. *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, volume 2 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer, 2. edition, 1993.
- [15] P.M. Gruber and J.M. Wills, editors. *Handbook of Convex Geometry*. North–Holland, 1993.
- [16] S. Har-Peled and K.R. Varadarajan. High-dimensional shape fitting in linear time. *Discrete Comput. Geom.*, 32(2):269–288, 2004.
- [17] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Springer, 2002.
- [18] N. Megiddo. On the complexity of some geometric problems in unbounded dimension. *J. Symb. Comput.*, 10(3/4):327–334, 1990.
- [19] C.H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison,Weley, 1994.
- [20] R. Schneider. *Convex bodies: The Brunn–Minkowski theory*, volume 44 of *Encycl. Math. Appl.* Cambridge University Press, 1993.
- [21] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization – Polyhedra and Efficiency*. Springer, 1991.
- [22] Y. Ye and J. Zhang. An improved algorithm for approximating the radii of point sets. In *Proc. Approx. Algorithms Comb. Opt.*, pages 178–187, 2003.
- [23] G.L. Zhou, K.C. Toh, and J. Sun. Efficient algorithms for the smallest enclosing ball problem. *Comput. Optim. Appl.*, 30:147–160, 2005.
- [24] G.M. Ziegler. *Lectures on polytopes*, volume 152 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, 2nd edition, 1995.