



Extremale Kombinatorik

Prof. Dr. Anusch Taraz | Dipl.-Math. Andreas Würfl

Aufgabe 1.1 Schubfachprinzip

Zeigen Sie mit Hilfe des Schubfachprinzips:

- Jeder Graph mit mindestens zwei Knoten hat zwei Knoten mit gleichem Grad.
- Wenn der Minimalgrad $\delta(G)$ von $G = (V, E)$ mit $n = |V|$ erfüllt, dass $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$, dann ist G zusammenhängend.

Aufgabe 1.2 C_4 -freie Graphen

Ein Graph G heißt C_4 -frei, wenn er keinen Kreis auf vier Knoten als Subgraph enthält.

Zeigen Sie: Ein Graph G auf n Knoten mit Durchschnittsgrad $\geq 2\sqrt{n}$ kann nicht C_4 -frei sein.

Hinweis:

Schätzen Sie die Anzahl der Pfade der Länge 2 in G auf zwei verschiedene Weisen ab.

Aufgabe 1.3 Der Satz von Turán

Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und sei $k \geq 3$. Wenn $|E| > \frac{k-2}{k-1} \frac{n^2}{2}$, dann enthält G eine k -Clique.

Beweisen Sie den Satz von Turán durch Induktion über die Knotenzahl. Nehmen Sie dazu im Induktionsschritt an, dass G eine Clique auf $k-1$ aber keine Clique auf k Knoten hat (warum geht das?). Schätzen Sie nun die Kantenanzahl von G ab, indem Sie die $(k-1)$ -Clique aus G entfernen und die Induktionsannahme auf den Restgraphen anwenden.

Aufgabe 1.4 Weight-Shifting mit Pfaden

Beweisen Sie: In einem vollständigen Graphen auf n Knoten, dessen Kanten mit $1, 2, \dots, \binom{n}{2}$ beschriftet sind, gibt es einen Pfad der Länge $n-1$ dessen Kantenbeschriftungen entlang des Pfades aufsteigen.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

Sei $w_x(i)$ die Länge eines maximalen aufsteigenden Pfades, der in $x \in V$ endet und nur Kanten verwendet, deren Beschriftungen $\leq i$ sind. Zeigen Sie:

- $\sum_{x \in V} w_x(i+1) \geq (\sum_{x \in V} w_x(i)) + 2$ für alle $i \in \{1, \dots, \binom{n}{2} - 1\}$
- Aus $\sum_{x \in V} w_x(\binom{n}{2}) \geq 2\binom{n}{2}$ folgt die Existenz des gesuchten Pfades.

Wir empfehlen, die Hausaufgaben zu bearbeiten und bieten eine Korrektur an. Bitte geben Sie Ihre Lösungen jeweils am Anfang der nächsten Vorlesung (in diesem Fall am 6. Mai) ab. Natürlich ist es auch möglich, in Gruppen abzugeben.