Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Extremale Kombinatorik

Prof. Dr. Anusch Taraz | Dipl.-Math. Andreas Würfl

Aufgabe 2.1 *Rekursion*
Ein geometrischer Beweis des Satzes von Erdős und Szekeres zeigt, dass die Anzahl $f(k,l)$ der Punkte, die keine konvexe oder konkave Menge der Größe k bzw. l haben, folgender Rekursionsformel genügt:

$$f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$$

Weiter ist bekannt, dass $f(3,m) = f(m,3) \leq m$ für jedes $m \geq 3$.
Beweisen Sie, dass dann auch $f(k,k) \leq 2^{2k}$ gilt.

Aufgabe 2.2 *Ein Ramsey-Beweis von Erdős-Szekeres*
Beweisen Sie den Satz von Erdős-Szekeres ein weiteres Mal mit Hilfe des Satzes von Ramsey. Überlegen Sie sich dazu:

a) Unter fünf Punkten in allgemeiner Lage existieren stets vier, die ein konvexes Viereck aufspannen.

b) Ein Polygon ist genau dann konvex, wenn jede vierelementige Teilmenge der Ecken ein konvexes Viereck aufspannt.

Benutzen Sie diese beiden Aussagen und den Satz von Ramsey zusammen mit einer geschickten Färbung von Teilmengen der Punktmenge, um die Existenz eines konvexen Polygons auf mindestens k Punkten zu zeigen.

Aufgabe 2.3 *Schur für $x + y = 3z$*
Der Satz von Schur besagt, dass für jedes $r \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jede Färbung $f : [n] \to [r]$ drei Zahlen $x, y, z \in [n]$ existieren mit $x + y = z$ und $f(x) = f(y) = f(z)$.

Zeigen Sie, dass die Aussage bereits für $r = 4$ falsch wird, wenn man $x + y = 3z$ anstelle von $x + y = z$ fordert.

Aufgabe 2.4 *Ramsey und Dichte*
Der Satz von Ramsey ist ein Partitionsresultat, zu dem es kein entsprechendes Dichteresultat gibt. Dies soll an folgendem Beispiel demonstriert werden:

a) Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine 2-Färbung der Kanten des K_n, so dass die Farbklasse mit den meisten Kanten keinen K_3 enthält.

b) Finden Sie für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für ein hinreichend großes n eine 2-Färbung der Kanten des K_n existiert, so dass eine Farbklasse mindestens $(1-\varepsilon)\binom{n}{2}$ Kanten aber trotzdem keinen K_k enthält.

Wir empfehlen, die Hausaufgaben zu bearbeiten und bieten eine Korrektur an. Bitte geben Sie Ihre Lösungen jeweils am Anfang der nächsten Vorlesung (in diesem Fall am 20. Mai) ab. Natürlich ist es auch möglich, in Gruppen abzugeben.