Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Extremale Kombinatorik

Prof. Dr. Anusch Taraz | Dipl.-Math. Andreas Würfl

Aufgabe 3.1 *Unendlich lange k-APs*
Für jedes endliche k existiert eine k-AP in der Menge der Primzahlen. Zeigen Sie, dass es trotzdem keine unendlich lange arithmetische Progression in der Menge der Primzahlen gibt.

Aufgabe 3.2 *Eine Variante des Satzes von van der Waerden*
Eine Verallgemeinerung des Satzes von van der Waerden, in der die Anzahl der Farben unbeschränkt ist, lautet:

Für jedes k existiert n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ und jede Färbung $f : [n] \to \mathbb{N}$ gilt: In $[n]$ existiert eine k-AP, deren Elemente alle die gleiche oder alle unterschiedliche Farbe haben. Im zweiten Fall sprechen wir auch von einer bunten k-AP.

Warum lässt sich der Satz von Ramsey nicht in der gleichen Weise verallgemeinern? Konstruieren Sie dazu für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Färbung $f : \binom{n}{2} \to \mathbb{N}$ der Kanten des vollständigen Graphen K_n, die weder ein einfarbiges noch ein dreifarbiges Dreieck erzeugt.

Aufgabe 3.3 *Van der Waerden – die Zweite*
Die Variante des Satzes von van der Waerden aus Aufgabe 3.2 garantiert eine einfarbige oder eine bunte 4-AP. Finden Sie ein Beispiel dafür, dass eine Färbung der natürlichen Zahlen mit einer unendlichen Anzahl von Farben keine bunte 4-AP erzwingt.

Aufgabe 3.4 *Van der Waerden – die Dritte*
Eine Färbung $f : [n] \to \mathbb{N}$ heißt (ε, T)-bunt, falls für jedes $X \subseteq [n]$ mit $|f(X)| \leq T$ gilt: $|X| < n - \varepsilon n$. Damit lässt sich eine *bunte Version* des Satzes von van der Waerden formulieren:

Zu jedem $k \geq 3$ und $\varepsilon > 0$ existieren N und T, so dass für jedes $n \geq N$ und jede Färbung $f : [n] \to \mathbb{N}$ das Folgende gilt: Wenn f (ε, T)-bunt ist, dann existiert eine bunte k-AP in $[n]$.

Beweisen Sie die bunte Version des Satzes von van der Waerden mit Hilfe einer quantitativen Version des Satzes von Szemerédi:

Zu jedem $k \geq 3$ und $\varepsilon > 0$ existieren $d > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \geq N$ jede Teilmenge $X \subseteq [n]$ mit $|X| \geq \varepsilon n$ mindestens dn^2 arithmetische Progressionen der Länge k enthält.

Hinweis:
Seien o.B.d.A. die Farben nach der Häufigkeit ihrer Verwendung angeordnet (d.h. keine Farbe wird in $[n]$ häufiger verwendet als Farbe 1). Betrachten Sie nun die Menge $X \subseteq [n]$ der Zahlen, die mit den Farben $\{T+1, T+2, \dots\}$ – für T geeignet gewählt – gefärbt werden und schätzen Sie die Anzahl der einfarbigen Paare in X nach oben ab.

Aufgabe 3.5 *Van der Waerden – die Vierte*
Beweisen Sie den Satz von van der Waerden mit Hilfe des Satzes von Hales-Jewett.

Wir empfehlen, die Hausaufgaben zu bearbeiten und bieten eine Korrektur an. Bitte geben Sie Ihre Lösungen jeweils am Anfang der nächsten Vorlesung (in diesem Fall am 3. Juni) ab. Natürlich ist es auch möglich, in Gruppen abzugeben.