Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Extremale Kombinatorik

Prof. Dr. Anusch Taraz | Dipl.-Math. Andreas Würfl

Aufgabe 4.1 *Die meisten Kanten verlaufen zwischen den Clustern*
Zeigen Sie, dass für jedes $\gamma > 0$ ein $\varepsilon > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für jeden Graphen $G = (V, E)$ und jede ε-reguläre Partition $V = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$ von G mit $k \geq m$ die Anzahl der Kanten mit einem Ende in V_0 oder beiden Enden im gleichen V_i wie folgt beschränkt ist:

$$e(V_0, V \setminus V_0) + \sum_{i=0}^{k} e(V_i) \leq \gamma n^2.$$

Aufgabe 4.2 *Dünne Paare sind regulär*
Ein bipartiter Graph $G = (A \cup B, E)$ mit $|E| \leq \varepsilon^3 |A||B|$ Kanten ist ein ε-reguläres Paar.

Aufgabe 4.3 *Eine Charakterisierung von ε-Regularität*
Ein bipartiter Graph $G = (A \cup B, E)$ mit Dichte $d(A, B) = d$ ist genau dann ε-regulär, wenn für alle $X \subset A$ und $Y \subset B$ mit $|X| = \lceil \varepsilon |A| \rceil$ und $|Y| = \lceil \varepsilon |B| \rceil$ gilt, dass $|d(X, Y) - d| \leq \varepsilon$.

Aufgabe 4.4 *Die Anzahl der Dreiecke in einem regulären Tripel*
Sei $G = (A \cup B \cup C, E)$ ein tripartiter Graph mit $|A| = |B| = |C| = n$ und $e(A, B) = e(B, C) = e(C, A) = dn^2$, so dass die drei bipartiten Graphen $G[A \cup B]$, $G[B \cup C]$ und $G[C \cup A]$ alle ε-regulär für ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \ll d$ sind. Zeigen Sie, dass für die Anzahl T der Dreiecke in G gilt:

$$(d - \varepsilon)^3 n^3 - 2\varepsilon n^3 \leq T \leq (d + \varepsilon)^3 n^3 + 2\varepsilon n^3.$$

Aufgabe 4.5 *Die ‘meisten’ k-Tupel haben die ‘richtige’ Anzahl gemeinsamer Nachbarn*
Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ und für alle reelen Zahlen $d, \xi > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt, falls $G = (A \cup B, E)$ ein ε-reguläres Paar mit $|A| = |B| = n \geq n_0$ und mit Dichte $d(A, B) = d$ ist, dann erfüllen alle bis auf höchstens ξn^k der möglichen k-Tupel $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq \binom{A}{k}$ verschiedener Knoten aus A, dass

$$(1 - \xi) d^k n \leq \left| \bigcap_{i=1}^{k} N(u_i) \right| \leq (1 + \xi) d^k n\,.$$

Wir empfehlen, die Hausaufgaben zu bearbeiten und bieten eine Korrektur an. Bitte geben Sie Ihre Lösungen jeweils am Anfang der nächsten Vorlesung (in diesem Fall am 17. Juni) ab. Natürlich ist es auch möglich, in Gruppen abzugeben.