Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Extremale Kombinatorik

Prof. Dr. Anusch Taraz | Dipl.-Math. Andreas Würfl

Aufgabe 5.1 *Induzierte Matchings*
Verwenden Sie das Regularitätslemma, um folgenden Satz zu zeigen:

Zu jedem $\alpha > 0$ existiert n_0, so dass für jeden Graphen $G = (V, E)$ auf $n \geq n_0$ Knoten gilt: Falls E die Vereinigung von n induzierten Matchings ist, gilt $e(G) \leq \alpha n^2$.

Hinweis:
Was sagt die Existenz eines induzierten Matchings über die Dichte eines regulären Paares aus?

Lösung zu Aufgabe 5.1
Sei $\alpha > 0$ gegeben und sei G ein Graph mit obigen Eigenschaften und $e(G) > \alpha n^2$. Wir wählen $\varepsilon < \frac{\alpha}{8}$ und wenden das Regularitätslemma an. Sei $V = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$ die Partition, die wir erhalten. Wir wissen, dass für k hinreichend groß mindestens $\frac{3\alpha}{4} n^2$ Kanten in ε-regulären Paaren liegen.

Seien nun $M_1, \ldots, M_n$ die Matchings, aus denen $E(G)$ besteht. Wir löschen alle Kanten aus G, die zu Matchings M_i mit $e(M_i) < \frac{\alpha}{2} n$ gehören. Ferner löschen wir alle Kanten die nicht in ε-regulären Paaren liegen. Wir erhalten den Graphen G' mit $e(G') \geq \frac{\alpha}{4} n^2$.

In G' betrachten wir für $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq n$ die Mengen $V_i \cap V(M_j)$. Falls $|V_i \cap V(M_j)| < \frac{\alpha}{8}|V_i|$ ist, löschen wir alle Kanten von M_j, die zu Knoten in V_i inzident sind. Auf diese Weise löschen wir maximal $\sum_i \frac{\alpha}{8}|V_i| = \frac{\alpha}{8} n$ Kanten von M_j. Wir erhalten G'' mit $e(G'') \geq \frac{\alpha}{8} n^2$.

Sei nun $e \in E(G'')$. OBdA liege e in dem regulären Paar V_i, V_j und in dem Matching M_l. Nun gilt für $A = V_i \cap V(M_l)$ und $B = V_j \cap V(M_l)$

a) $|A| \geq \frac{\alpha}{8}|V_i| \geq \varepsilon |V_i|$, $|B| \geq \frac{\alpha}{8}|V_j| \geq \varepsilon |V_j|$ und

b) $d(A, B) \leq \min\{\frac{1}{|A|}, \frac{1}{|B|}\}$.

Auf Grund der Regularität von (V_i, V_j) und der Tatsache, dass $d(A, B) \to 0$ für $|V| \to \infty$, muss die Dichte von (V_i, V_j) klein sein. Da dies für jedes Paar (V_i, V_j) in G'' gilt, folgt ein Widerspruch zu $e(G'') \geq \frac{\alpha}{8} n^2$ und damit auch zu $e(G) \geq \alpha n^2$.

Aufgabe 5.2 *Gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke*
Im Gitter $[N] \times [N]$ bilden die Punkte (x, y), $(x, y + d)$, $(x + d, y)$ ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck. Ajtai und Szemerédi haben folgenden Satz gezeigt:

Zu $\delta > 0$ existiert N_0, so dass für jedes $N \geq N_0$ gilt: Wenn $R \subseteq [N] \times [N]$ mit $|R| \geq \delta N^2$ ist, existieren $(x, y), (x, y + d), (x + d, y) \in R$ mit $d \neq 0$.

Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 5.1. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:
Definieren Sie einen bipartiten Graph, dessen Kanten durch R gegeben sind. Suchen Sie hier (nicht) induzierte Matchings.

Lösung zu Aufgabe 5.2
Seien $\delta > 0$ und $R \subseteq [N] \times [N]$ mit $|R| \geq \delta n^2$ gegeben. Wir konstruieren einen bipartiten Graphen $G = (V, E)$ auf $V = \{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{w_1, \ldots, w_n\}$, wobei $\{v_i, w_j\} \in E$ genau dann, wenn $(i, j) \in R$ ist.

Wir definieren folgende Äquivalenzrelation auf E: $(v_i, w_j) \sim (v_{i'}, w_{j'})$ genau dann, wenn $i + j = i' + j'$. Wie man leicht sieht, sind die Kanten einer Äquivalenzklasse ein Matching in G.

Ist nun N groß genug, so ist nach Aufgabe 5.1 mindestens eines dieser Matchings nicht induziert. Seien z.B. die Kanten $\{v_i, w_j\}$ und $\{v_{i'}, w_{j'}\}$ mit der Kante $\{v_i, w_{j'}\}$ verbunden. Mit $j' = j - d$ folgt:

$$i + j = i' + j' = i' + (j - d) \quad \Rightarrow \quad i = i' - d\,.$$

Also liegen folgende Elemente in R: (i, j'), $(i, j) = (i, j' + d)$, $(i', j') = (i + d, j')$.

Aufgabe 5.3 *Rusza Szemerédi*
Zeigen Sie mit Hilfe des Regularitätslemmas folgenden Satz:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $RS(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für jeden Graph $G = (V, E)$ auf $n \geq RS(\varepsilon)$ Knoten gilt: Wenn sich die Kantenmenge von G in mindestens εn^2 kantendisjunkte Dreiecke partitionieren lässt, dann enthält G ein sogenanntes (6,3)-Tripel. Dabei ist ein (6,3)-Tripel der Graph auf sechs Knoten, dessen Kanten die Vereinigung von drei kantendisjunkten Dreiecken sind.

Hinweis:
Finden Sie ein Dreieck im reduzierten Graphen und benutzen Sie das Einbettungslemma 2.7.

Lösung zu Aufgabe 5.3
Wir führen die Aussage des Satzes von Rusza Szemerédi auf eine Aussage über induzierte Matchings zurück.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei $RS(\varepsilon) = n_0$ die untere Schranke aus Aufgabe 5.1 für $\alpha = \varepsilon$. Sei weiter $G = (V, E)$ ein Graph auf $n \geq n_0$ Knoten. Zu jedem Knoten $v \in V$ definieren wir M_v als die Menge aller Kanten $\{u, w\}$ für die gilt: $\{v, u, w\}$ ist ein Dreieck in G. M_v ist tatsächlich ein Matching, da E die Vereinigung kantendisjunkter Dreiecke ist! Nehmen wir an, M_v wäre ein nicht-induziertes Matching. Dann existieren oBdA $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\} \in M_v$ mit $\{u_1, w_2\} \in E$. Sei $x \in V$ der dritte Knoten im Dreick $\{u_1, w_2, x\}$. Da E die Vereinigung von kantendisjunkten Dreiecken ist, gilt $x \notin \{v, u_1, u_2, w_1, w_2\}$. Also spannt $\{x, v, u_1, u_2, w_1, w_2\}$ ein (6,3)-Tripel auf; ein Widerspruch.

Damit wissen wir, dass E die Vereinigung von n induzierten Matchings ist, und G damit nach Aufgabe 5.1 höchstens εn^2 Kanten hat.

Aufgabe 5.4 *Der Satz von Roth*

Der Satz von Roth besagt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass für $n \geq n_0$ gilt: jede Teilmenge $A \subset [n]$ mit $|A| \geq \varepsilon n$ enthält eine 3-AP.

Beweisen Sie den Satz von Roth mit Hilfe von Aufgabe 5.3, indem Sie ein (6,3)-Tripel in folgendem Graphen $G = (V, E)$ finden: $V = X \cup Y \cup Z$ mit $X = \{x_1, \ldots, x_{3n}\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_{3n}\}$, $Z = \{z_1, \ldots, z_{3n}\}$. Dabei induziere $\{x_i, y_j, z_k\}$ ein Dreieck in G, wenn $k - j = j - i \in A$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 5.4

Wie im Tipp angegeben, definieren wir $G = (V, E)$, wobei $V = X \cup Y \cup Z$ mit $X = \{x_1, \ldots, x_{3n}\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_{3n}\}$, $Z = \{z_1, \ldots, z_{3n}\}$. Die Kantenmenge sei die Vereinigung der Dreiecke $\{x_i, y_j, z_k\}$, für die $k - j = j - i \in A$ gilt. In einem ersten Schritt beweisen wir, dass dieser Graph genügend Kanten hat, um ein (6,3)-Tripel zu erzwingen, woraus wir im zweiten Schritt die Existenz einer 3-AP in A folgern.

Für jedes Element $a \in A$ und jedes $i \in [n]$ gilt: $\{x_i, y_j, z_k\}$ mit $j = i + a$, $k = 2j - i$ bildet ein Dreieck in G. Also gilt

$$|E| \geq |A|n \geq \varepsilon n^2 > \alpha(9n)^2$$

für $\alpha < \frac{\varepsilon}{81}$. Wir wählen also n_0 für dieses α entsprechend Aufgabe 5.3.

Damit ist ein (6,3)-Tripel in G erzwungen. Sei $\{x_{i'}, y_{j'}, z_{k'}\}$ das innere Dreieck des Tripels. Dieses Dreieck ist keines der konstruierten Dreiecke; es gilt also nich $k' - j' = j' - i'$. Wir setzen $a_0 = j' - i'$, $a_2 = k' - j'$. Nach Definition gilt $a_0, a_2 \in A$. Setze nun

$$a_1 = \frac{a_0 + a_2}{2} = \frac{j' - i' + k' - j'}{2} = \frac{k' - i'}{2} \ .$$

Sei $\{x_{i'}, y_j, z_{k'}\}$ das Dreieck, aus dem die Kante $\{x_{i'}, z_{k'}\}$ stammt. Da $k' - j = j - i' \in A$ gilt, ist $\frac{k'-i'}{2} = \frac{(k'-j)+(j-i')}{2} = k' - j \in A$. Also ist a_0, a_1, a_2 eine 3-AP in A.