# Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt


# Optimierung 3, SS 2009

## Übungsblatt 1

---

**Aufgabe 1.1**

Seien $\alpha \in \mathbb{N}$ und $C := \text{pos}(\alpha[-1,1]^{n-1} \times \{1\})$.

Bestimmen Sie eine minimale Hilbertbasis für $C$. Ist sie eindeutig? Was stellen Sie fest?

*Lösung zu Aufgabe 1.1*

Seien $x, x_1, x_2 \in C \cap (\mathbb{Z}^n \backslash \{0\})$ mit $x = x_1 + x_2$. Dann gilt $u_n^T x_1 \geq 1$ und $u_n^T x_2 \geq 1$ und damit $u_n^T x \geq 2$. Somit liegt jeder der $(2\alpha + 1)^{n-1}$ Vektoren aus $(\alpha[-1,1]^{n-1} \times \{1\}) \cap \mathbb{Z}^n$ in der minimalen Hilbertbasis des Kegels $C$.

Mit $\alpha \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest, können alle anderen Punkte in $C \cap (\mathbb{Z}^n \backslash \{0\})$ trivialerweise aus diesen Vektoren aufsummiert werden. $C$ enthält keine Gerade, ist also ein spitzer Kegel, damit ist $(\alpha[-1,1]^{n-1} \times \{1\}) \cap \mathbb{Z}^n$ die eindeutige Hilbertbasis. Die Anzahl ihrer Elemente ist exponentiell in der Dimension des Kegels.

**Aufgabe 1.2**

Gegeben seien die folgenden ILPs der Form $\max\limits_{x \in P \cap \mathbb{Z}^2} c^T x$.

Bestimmen Sie ausgehend vom relaxierten Optimalpunkt jeweils den ersten Gomory-Schnitt.

a) $P := \text{conv}\{(0,0)^T, (\frac{3}{4}, 0)^T, (0, \frac{3}{4})^T, (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})^T\}$, $c = (1,1)^T$

b) $P := \text{conv}\{(0,0)^T, (\frac{3}{4}, 0)^T, (0, \frac{3}{4})^T, (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})^T\}$, $c = (2,2)^T$

c) $P := \text{conv}\{(0,0)^T, (\frac{3}{2}, 0)^T, (0, \frac{3}{2})^T, (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^T\}$, $c = (1,1)^T$

d) Beschreiben Sie informell, was für Auswirkungen Skalierungen wie in Aufgabe $b$) und $c$) auf einen Gomory-Schnitt haben können.

e) Wie kann man nach einem Schnitt besonders effizient den neuen relaxierten Optimalpunkt finden?

*Lösung zu Aufgabe 1.2*

a) Zunächst müssen wir zu einer ganzzahligen(!) $H$-Darstellung übergehen:

$$P := \{x \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Der relaxierte Optimalpunkt ist $x^* = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, es gilt $B = \{1, 2\}$. $c^T x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, also wählen wir $v = c$. Dann haben wir

$$A_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$y_B^* =< (A_B^{-1})^T c >=< \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c >= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow y^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$q^* = A^T y^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt den Gomory-Schnitt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T x = x_1 + x_2 \leq \llcorner \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T x^* \lrcorner = 1.$

b) Durch die Skalierung von $c$ mit dem Faktor 2 wird $c^T x = 3$ ganzzahlig, also wählen wir $v = u_1$, denn der Optimalpunkt in $P$ ist weiterhin $x^* = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, und dessen erste Komponente ist fraktionell.

Wir erhalten

$$y_B^* =< (A_B^{-1})^T u_1 >=< \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_1 >= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$q^* = A^T y^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt den Gomory-Schnitt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T x = x_1 \leq \llcorner \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T x^* \lrcorner = \llcorner \frac{3}{4} \lrcorner = 0.$

c) Diesmal wurde $P$ um den Faktor 2 skaliert, erneut wird $c^T x = 3$ ganzzahlig, also wählen wir $v = u_1$, denn der Optimalpunkt in $P$ ist $x^* = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, und dessen erste Komponente ist fraktionell. Es gilt

$$P := \{x \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, A_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$y_B^* =< (A_B^{-1})^T u_1 >=< \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_1 >= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$q^* = A^T y^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt den Gomory-Schnitt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T x = x_1 \leq \lfloor \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T x^* \rfloor = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1.$

d) Die Skalierung der Zielfunktion kann dazu führen, dass aus fraktionellen Zielfunktionswerten ganzzahlige werden (oder umgekehrt). Dementsprechend spielt sie eine Rolle bei der Auswahl der Schnittrichtung.

Die Skalierung eines Polyeders führt im Allgemeinen natürlich dazu, dass weitere ganzzahlige Punkte im Polyeder enthalten sind. Dadurch sind die Entscheidungen des Gomory-Algorithmus für die verschiedenen Polyeder schlecht vergleichbar.

e) Der ursprüngliche optimale Primalpunkt bzw. seine Basis sind durch die Hinzunahme einer weiteren Hyperebene unzulässig geworden. Die dazu gehörige duale Basis ist allerdings weiterhin zulässig. Man kann im Dualen einen Schritt zur (optimalen) dualen Basis machen, um die neue primal zulässige und optimale zu erhalten. Vgl. Blatt 2, Optimierung 2.