Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung 3, SS 2009

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1
Seien $C \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sowie $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 : C \to \mathbb{R}$ und $\tau : I \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen mit $\varphi(C) \subset I$. Zeigen Sie: Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Für $\mu \in [0, \infty[$ ist $\mu\varphi$ konvex.

b) Ist φ strikt konvex und gilt $\mu > 0$, so ist auch $\mu\varphi$ strikt konvex.

c) $\varphi_1 + \varphi_2$ ist konvex.

d) Ist φ_1 strikt konvex, so ist $\varphi_1 + \varphi_2$ strikt konvex.

e) Ist τ monoton wachsend, so ist $\tau \circ \varphi$ konvex.

f) Sind τ strikt monoton wachsend und φ strikt konvex, so ist auch $\tau \circ \varphi$ strikt konvex.

Lösung zu Aufgabe 2.1
Seien im folgenden stets $x \in C, y \in C\backslash\{x\}$ und $\lambda \in]0, 1[$.

a) Spezialfall von *e)*

b) Spezialfall von *f)*

c) Da φ_1 und φ_2 konvex sind, gilt

$$\begin{aligned}
& (\varphi_1 + \varphi_2)(\lambda x + (1-\lambda)y) = \\
= \; & \varphi_1(\lambda x + (1-\lambda)y) + \varphi_2(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \\
\leq \; & \lambda\varphi_1(x) + (1-\lambda)\varphi_1(y) + \lambda\varphi_2(x) + (1-\lambda)\varphi_2(y) = \\
= \; & \lambda(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) + (1-\lambda)(\varphi_1(y) + \varphi_2(y)) = \\
= \; & \lambda(\varphi_1 + \varphi_2)(x) + (1-\lambda)(\varphi_1 + \varphi_2)(y)
\end{aligned}$$

d) Analog zu *c)* ergibt sich hier die strikte Konvexität wie folgt:

$$\begin{aligned}
& (\varphi_1 + \varphi_2)(\lambda x + (1-\lambda)y) = \\
= \; & \varphi_1(\lambda x + (1-\lambda)y) + \varphi_2(\lambda x + (1-\lambda)y) < \\
< \; & \lambda\varphi_1(x) + (1-\lambda)\varphi_1(y) + \lambda\varphi_2(x) + (1-\lambda)\varphi_2(y) = \\
= \; & \lambda(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) + (1-\lambda)(\varphi_1(y) + \varphi_2(y)) = \\
= \; & \lambda(\varphi_1 + \varphi_2)(x) + (1-\lambda)(\varphi_1 + \varphi_2)(y)
\end{aligned}$$

e) Da τ monoton wachsend ist, und φ und τ konvex sind, gilt

$$\begin{aligned} & (\tau \circ \varphi)(\lambda x + (1-\lambda)y) = \\ = \; & \tau(\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \\ \leq \; & \tau(\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)) \leq \\ \leq \; & \lambda(\tau \circ \varphi)(x) + (1-\lambda)(\tau \circ \varphi)(y) \end{aligned}$$

f) Analog zu e) ergibt sich hier die strikte Konvexität wie folgt:

$$\begin{aligned} & (\tau \circ \varphi)(\lambda x + (1-\lambda)y) = \\ = \; & \tau(\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y)) < \\ < \; & \tau(\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)) \leq \\ \leq \; & \lambda(\tau \circ \varphi)(x) + (1-\lambda)(\tau \circ \varphi)(y) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2
Betrachten Sie die folgende Funktion $f : K = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 > 0\} \cup \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \frac{\xi_2^2}{2\xi_1}, & \xi_1 > 0 \\ 0, & \xi_1 = \xi_2 = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf

a) Konvexität und strikte Konvexität

b) Stetigkeit und Halbstetigkeit nach oben

Lösung zu Aufgabe 2.2

a) Für $x = (\xi_1, 0)^T$ und $y = (\eta_1, 0)^T$ mit $\xi_1 > 0$, $\eta_1 > 0$ gilt $f(x) = f(y) = 0$. Dies gilt auch für alle $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, also kann f nicht strikt konvex sein.

Auf $\{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 > 0\}$ ist f konvex. Das sieht man an einer positiv semidefiniten Hessematrix. Es ergibt sich

$$f''(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \frac{\xi_2^2}{\xi_1^3} & -\frac{\xi_2}{\xi_1^2} \\ -\frac{\xi_2}{\xi_1^2} & \frac{1}{\xi_1} \end{pmatrix}$$

Es gilt $\frac{\xi_2^2}{\xi_1^3} \geq 0$, $\frac{1}{\xi_1} \geq 0$ und $det f''(\xi_1, \xi_2) = 0$ für alle $x = (\xi_1, \xi_2)$ mit $\xi_1 > 0$. Also sind die Determinanten aller quadratischen Teilmatrizen ≥ 0, und damit f'' auf $\{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 > 0\}$ konvex.

Sei nun $x = (0,0)^T$ und $y = (\eta_1, \eta_2)^T$ mit $\eta_1 > 0$. Dann ist

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f((1-\lambda)y) = \frac{(1-\lambda)^2}{1-\lambda} f(y) = (1-\lambda)f(y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

damit ist also f auf jedem von $(0,0)^T$ ausgehenden Strahl linear, und insbesondere konvex auf ganz K.

b) Die Stetigkeit von f auf $\{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 > 0\}$ ist klar, genauso wie die Stetigkeit von f auf jedem von $(0,0)^T$ ausgehenden Strahl (Aufgabe a)).

Sei nun $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir betrachten die Parabel $\xi_1 = \frac{\xi_2^2}{2\alpha}$. f ergibt für alle Punkte auf dieser Parabel den Wert α, also insbesondere den Grenzwert α, wenn man sich dem Nullpunkt auf der Parabel nähert.

Damit ist f im Nullpunkt nicht halbstetig nach oben, und damit auch nicht auf K.