Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung 3, SS 2009

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1
Sei $f:]0,\infty[^n \to \mathbb{R}$ für $x := (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T \in]0,\infty[^n$ das geometrische Mittel definiert durch

$$f(x) := (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n)^{\frac{1}{n}}$$

Zeigen Sie: f ist konkav.

Aufgabe 3.2

a) Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und konvex, sei $\mathbb{F}$ eine Familie konvexer Funktionen auf C und sei für jedes x aus C die Menge $\{\varphi(x) : \varphi \in \mathbb{F}\}$ nach oben beschränkt.

   Zeigen Sie: Die durch $\kappa(x) := \sup\{\varphi(x) : \varphi \in \mathbb{F}\}$ für $x \in C$ definierte Funktion $\kappa : C \to \mathbb{R}$ ist konvex.

b) Seien $C \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $\varphi : C \to \mathbb{R}$ konvex.

   Zeigen Sie: Dann existiert für jeden Punkt $x \in C$ und jeden Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ die einseitige Richtungsableitung $\varphi'(x; s)$.

c) Seien $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $\varphi : C \to \mathbb{R}$ konvex und $F^* := \operatorname{argmin}_{x \in C} \varphi(x)$.

   Zeigen Sie: Dann ist F^* konvex. Ist φ strikt konvex, so ist F^* höchstens einelementig.