Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung 3, SS 2009

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1
Sei $f :]0,\infty[^n \to \mathbb{R}$ für $x := (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in]0,\infty[^n$ das geometrische Mittel definiert durch

$$f(x) := (\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n)^{\frac{1}{n}}$$

Zeigen Sie: f ist konkav.

Lösung zu Aufgabe 3.1
Sei $y := (\eta_1, \dots, \eta_n)^T \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Es reicht zu zeigen, dass $y^T(f''(x)y) \leq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$f''(x)_{ii} = (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}) f(x) \cdot \xi_i^{-2}$$

und für $i \neq j$

$$f''(x)_{ij} = \frac{1}{n^2} f(x) \cdot \xi_i^{-1} \xi_j^{-1}$$

Hiermit erhalten wir für die i-te Zeile von $f''(x)y$

$$(f''(x)y)_i = \sum_{j=1}^{n} (f''(x)_{ij} y_j) = \frac{1}{n^2} f(x)(\frac{1}{\xi_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\eta_j}{\xi_j} - n \frac{\eta_i}{\xi_i^2})$$

Dies ergibt für den i-ten Summanden von $y^T(f''(x)y)$

$$\eta_i (f''(x)y)_i = \frac{1}{n^2} f(x)(\frac{\eta_i}{\xi_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\eta_j}{\xi_j} - n \frac{\eta_i^2}{\xi_i^2})$$

und insgesamt

$$y^T f''(x) y = \frac{1}{n^2} f(x)((\sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_i}{\xi_i})^2 - n \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_i^2}{\xi_i^2})$$

Da alle $\xi_i > 0$ sind, ist $f(x) > 0$. Zudem gilt ja für beliebige reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Ungleichung $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^2 \leq n(\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)$, also insbesondere für $\frac{\eta_i}{\xi_i}$. Also ist

$$(\sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_i}{\xi_i})^2 - n \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_i^2}{\xi_i^2} \leq 0$$

womit $y^T f''(x)y \leq 0$ für alle y folgt. Somit ist f konkav.

Aufgabe 3.2

a) Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und konvex, sei $\mathbb{F}$ eine Familie konvexer Funktionen auf C und sei für jedes x aus C die Menge $\{\varphi(x) : \varphi \in \mathbb{F}\}$ nach oben beschränkt.

   Zeigen Sie: Die durch $\kappa(x) := \sup\{\varphi(x) : \varphi \in \mathbb{F}\}$ für $x \in C$ definierte Funktion $\kappa : C \to \mathbb{R}$ ist konvex.

b) Seien $C \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $\varphi : C \to \mathbb{R}$ konvex.

   Zeigen Sie: Dann existiert für jeden Punkt $x \in C$ und jeden Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ die einseitige Richtungsableitung $\varphi'(x; s)$.

c) Seien $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $\varphi : C \to \mathbb{R}$ konvex und $F^* := \operatorname{argmin}_{x \in C} \varphi(x)$.

   Zeigen Sie: Dann ist F^* konvex. Ist φ strikt konvex, so ist F^* höchstens einelementig.

Lösung zu Aufgabe 3.2

a) Eine Funktion ist nach Vorlesung genau dann konvex, wenn ihr Epigraph eine konvexe Menge ist. Die Supremumsfunktion entspricht dem Durchschnitt der Epigraphen der Familie konvexer Funktionen, und dieser ist dann auch konvex.

b) Für $s = 0$ ist die Aussage trivial. Seien also $s \in \mathbb{R}^n$ mit $s \neq 0$ und $x_o \in C$, damit ist $S := x + \mathbb{R}s$ eine Gerade. Nach Vorlesung existieren die rechts- und linksseitigen Richtungsableitungen für die durch $\psi(\tau) := \varphi(x_0 + \tau s)$ für $\tau \in \mathbb{R}$ mit $x_0 + \tau s \in S \cap C$ definierte Funktion. Also gilt die Behauptung für $\varphi_{|S \cap C}$, und da $x_0 \in C$ und $s \in \mathbb{R}^n$ beliebig gewählt waren, folgt die Behauptung für φ auf ganz C.

c) Seien $x_1, x_2 \in F^*$ und $\lambda \in]0, 1[$. Dann gilt

$$\min_{x \in C} \varphi(x) \leq \varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda\varphi(x_1) + (1 - \lambda)\varphi(x_2) = \min_{x \in C} \varphi(x)$$

   Also ist auch $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in F^*$, und damit F^* konvex.

   Ist φ strikt konvex, so ist obige Ungleichungs strikt, und erzeugt für $x_1 \neq x_2$ einen Widerspruch. Also ist F^* in diesem Fall höchstens einelementig.