Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung 3, SS 2009

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Sei H ein System von Halbräumen mit

$$C = \bigcap_{H^{\leq}_{(a,\beta)} \in H} H^{\leq}_{(a,\beta)}.$$

Sei ferner

$$H' := \{(H')^{\leq}_{(a,\beta)} \subset \mathbb{R}^{n+1} : H^{\leq}_{(a,\beta)} \in H\},$$
$$(H')^{\leq}_{(a,\beta)} := \{x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R} : (a^T, -1)(x, \xi)^T \leq \beta\}$$

und sei

$$K = \bigcap_{(H')^{\leq}_{(a,\beta)} \in H'} (H')^{\leq}_{(a,\beta)}.$$

Konstruieren Sie eine konvexe Funktion $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $epi(\alpha) = K$ und $L_{\alpha,\mathbb{R}^n}(0) = C$.

Wie viele konvexe Funktionen α mit $L_{\alpha,\mathbb{R}^n}(0) = C$ gibt es?

Lösung zu Aufgabe 4.1

Wir betrachten zunächst K. Als Schnitt von Halbräumen ist K natürlich konvex. Sei $(x_0, \xi_0)^T \in K$, also $a^T x_0 - \xi_0 \leq \beta$ für alle $(H')^{\leq}_{(a,\beta)} \in H'$. Da die Vektoren $(a^T, -1)^T$ in der letzten Komponente einen negativen Eintrag haben, wissen wir, dass $a^T x_0 - (\xi_0 + \lambda) \leq \beta$ für alle $\lambda \geq 0$. Also ist $(x, \xi)^T + [0, \infty[u_{n+1} \subset K$. Für festes x_0 gibt es ein eindeutiges minimales ξ_0 mit $(x_0, \xi_0)^T \in K$, denn $a^T x_0 - \xi_0 \leq \beta \Leftrightarrow \xi_0 \geq a^T x_0 - \beta$. Die Frage nach einer Funktion α mit $epi(\alpha) = K$ ist daher wohlgestellt.

Wir definieren $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $\alpha(x) := \min\{\lambda : (x, 0)^T + \lambda u_{n+1} \in K\} = \max\{a^T x - \beta : H^{\leq}_{(a,\beta)} \in H\}$. Nach Definition ist $epi(\alpha) = K$. Für $x \in C$ kann $\lambda = 0$ gewählt werden, und für $\lambda = 0$ erfüllen genau die $x \in C$ die aufgestellte Bedingung, also ist $L_{\alpha,\mathbb{R}^n}(0) = C$. α erfüllt also die geforderten Eigenschaften.

Nach unserem Prinzip lassen sich unendlich viele Funktionen mit $L_{\alpha,\mathbb{R}^n}(0) = C$ konstruieren. Dazu müssen wir bei der Definition der $(H')^{\leq}_{(a,\beta)}$ nur die Bedingung $(a^T, -1)(x, \xi)^T \leq \beta$ durch $(a^T, -\gamma)(x, \xi)^T \leq \beta$ für ein beliebiges $\gamma > 0$ ersetzen.

Aufgabe 4.2

Sei P ein rechtwinkliges Parallelotop im $\mathbb{R}^n$, v eine Ecke von P und $s_1, \dots, s_m \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge von paarweise verschiedenen Vektoren, so dass $\{v + s_i : i \in \{1, \dots, m\}\}$ die Menge aller zu v benachbarten Ecken ist.

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der den bezüglich der Euklidischen Norm maximalen Punkt von P bestimmt, und dazu höchstens $m + 1$ Skalarprodukte berechnet und m Vergleiche benutzt.

Hinweis: Warum reicht es nach der bezüglich des Quadrats der euklidischen Norm in P optimalen Ecke zu suchen?

Lösung zu Aufgabe 4.2
Sei $x \in C$ der unter der euklidischen Norm $< x, x >^{\frac{1}{2}}$ maximale Punkt einer konvexen Menge C. Dann ist $x \in C$ auch unter dem Quadrat der euklidischen Norm (bzw. dem Skalarprodukt) $< x, x >$ maximal, welches natürlich eine konvexe Funktion ist, da die Hessematrix das Doppelte der Einheitsmatrix ist. Entsprechend wird auf dem gegebenen (konvexen) Polytop P das Maximum in einer Ecke angenommen. Wir entwerfen im Folgenden also einen Algorithmus, der die optimale Ecke des Parallelotops P bezüglich des Quadrats der euklidischen Norm findet.

Die s_i sind paarweise orthogonal zueinander, da P rechtwinklig ist, und es gilt $P = v + S_m$ für $S_k := \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]\}$. In Pseudocode lautet unser Algorithmus:

$q \leftarrow v$
for $i \in \{1, \dots, m\}$ do
if $\langle q + s_i, q + s_i \rangle > \langle q, q \rangle$ then $q \leftarrow q + s_i$

Am Ende des Algorithmus ist q der Optimalpunkt. Sei $v_0 = v$ und sei für $1 \leq i \leq n$ v_i der Wert von q nach dem i-ten Durchlauf der for-Schleife. Dann ist v_i natürlich eine Ecke des i-Parallelotops $v + S_i$ und wir behaupten, dass v_i die euklidische Norm über $v + S_i$ maximiert. Für $i = 0$ ist das trivialerweise wahr.

Die Aussage gelte nun für $i - 1$. Man beachte, dass die Knoten von $v + S_i$ gerade die Form $v + s$ oder $v + s + s_i$ haben, wobei s zur Eckenmenge V_{i-1} von S_{i-1} gehört. Für jedes $s \in V_{i-1}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle v + s + s_i, v + s + s_i \rangle &= \langle v + s, v + s \rangle + \langle s_i, s_i \rangle + 2\langle v + s, s_i \rangle \\ &= \langle v + s, v + s \rangle + \langle s_i, s_i \rangle + 2\langle v, s_i \rangle \end{aligned}$$

da ja $\langle s, s_i \rangle = 0$ wegen der paarweise orthogonalen s_i. Für $s, t \in V_{i-1}$ gilt hiermit

$$\langle v + s, v + s \rangle \geq \langle v + t, v + t \rangle$$

genau dann wenn

$$\langle v + s + s_i, v + s + s_i \rangle \geq \langle v + t + s_i, v + t + s_i \rangle$$

da $\langle s_i, s_i \rangle$ und $\langle v, s_i \rangle$ für unsere festen v, s_i konstant sind.

Da nach Induktionsannahme v_{i-1} die Norm über $v + S_{i-1}$ maximiert, folgern wir, dass v_{i-1} oder $v_{i-1} + s_i$ die Norm über $v + S_i$ maximiert. Damit arbeitet der Algorithmus korrekt. Die Anzahl der benötigten Skalarprodukte und Vergleiche ist trivial abzulesen.