Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung 3, SS 2009

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1
Betrachten Sie das folgende Problem:

Sie besitzen eine (leere) Bierdose. Die Dose hat ein Eigengewicht (das sie als gleichverteilt über die ganze Dose annehmen können) und ein gewisses Fassungsvermögen. Sie können die Dose beliebig hoch (in Prozent) mit Wasser auffüllen. Wie hoch muss der Wasserstand in der Dose sein, damit man einen möglichst tiefen Schwerpunkt bekommt?

Modellieren Sie das Problem als konvexe Minimierungsaufgabe. Begründen Sie die Konvexität der Aufgabe!

Lösung zu Aufgabe 5.1
Sei g das Gewicht der Dose in Kilogramm, v das Fassungsvermögen in Litern. Wir bezeichnen die prozentuale Füllhöhe der Dose mit der Variable $x \in [0, 1]$. Der Schwerpunkt der leeren Dose liegt bei der Füllhöhe von $\frac{1}{2}$ bzw. 50%. Der Schwerpunkt des eingefüllten Wassers liegt bei $\frac{1}{2}x$. Damit ergibt sich der Schwerpunkt der teilweise gefüllten Dose als $(g \cdot \frac{1}{2} + (x \cdot v) \cdot \frac{1}{2}x) \cdot \frac{1}{x \cdot v + g}$.

Zusammen ergibt sich das konvexe Optimierungsproblem

$$\min \frac{g \cdot \frac{1}{2} + (x \cdot v) \cdot \frac{1}{2}x}{x \cdot v + g}$$

mit $0 \leq x \leq 1$. Die (strikte) Konvexität sieht man durch elementare Rechnung: Die erste Ableitung ist

$$\frac{1}{2}(2xv(xv + g)^{-1} - v(x^2v + g)(xv + g)^{-2})$$

Die zweite Ableitung ergibt

$$\frac{v}{2(xv + g)^3}(2(xv + g)^2 - 2xv(xv + g) - 2xv(xv + g) + 2v(x^2v + g))$$

Der Bruch vor der Klammer ist positiv. Ein Ausmultiplizieren der großen Klammer lässt den Term $2g^2 + 2gv$ übrig, und dieser ist echt positiv. Das zeigt die strikte Konvexität der Zielfunktion.

Aufgabe 5.2

a) Gegeben sei die Funktion $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $\alpha(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|$ für $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$. Bestimmen Sie das Subdifferential von α im Nullpunkt.

b) Seien $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex, $K \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und es gelte $C \subset K$. Ferner seien $\varphi : K \to \mathbb{R}$ konvex, $x^* \in C$ sei Maximalpunkt von φ bezüglich C, und es sei $a \in \partial\varphi(x^*)$. Sei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die durch $\psi(x) := \varphi(x^*) + a^T(x - x^*)$ definierte affine Funktion. Zeigen Sie: Dann gilt

$$\psi(x^*) = \max_{x \in C} \psi(x) = \max_{x \in C} \varphi(x) = \varphi(x^*)$$

Lösung zu Aufgabe 5.2

a) Mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}^n$ und der konvexen Funktion α (als Summe konvexer Funktionen) ist die Aufgabenstellung wohldefiniert. Nach Definition gehört ein Vektor a genau dann zum Subdifferential im Nullpunkt, wenn für alle $s \in \mathbb{R}^n$ $\alpha(s) \geq \alpha(0) + a^T(s - 0) = a^T s$.

(Alternativ: Nach Lemma 8.2.15 gehört ein Vektor a genau dann zum Subdifferential im Nullpunkt, wenn für alle $s \in \mathbb{R}^n$ $\alpha'(0; s) \geq a^T s$. Es gilt $\alpha'(0; s) = \lim\limits_{\tau \to 0+} \frac{\alpha(\tau s) - \alpha(0)}{\tau} = \lim\limits_{\tau \to 0+} \frac{\sum_{i=1}^{n} |\tau s_i| - 0}{\tau} = \alpha(s)$.)

Nun gilt $\alpha(s) \geq a^T s \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} |s_i| \geq \sum\limits_{i=1}^{n} a_i s_i$. Da s beliebig ist, und $a_i s_i \leq |s_i|$ genau für $|a_i| \leq 1$ gilt, erhalten wir das Subdifferential $\partial\alpha(0) = \{a = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n : |a_i| \leq 1 \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

b) Nach Voraussetzung und Definition gilt $\psi(x^*) = \varphi(x^*) + a^T(x^* - x^*) = \varphi(x^*) \geq \varphi(x)$ für alle $x \in C$. Da $a \in \partial\varphi(x^*)$ gilt, ist $\varphi(x) \geq \varphi(x^*) + a^T(x - x^*) = \psi(x)$ und damit $\psi(x^*) \geq \psi(x)$.

Alternativ: Für $a = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $a \neq 0$, dann ist a enthalten im Kegel der äußeren Normalen an C (Satz bzw. Beweis von Satz 8.2.30), d.h. es gilt $a^T x \leq a^T x^*$ für alle $x \in C$. Hiermit folgt die Behauptung.