Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung 3, SS 2009

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1
Betrachten Sie das konvexe Optimierungsproblem aus Aufgabe 5.1.

Wie hoch müssen Sie die Dose mit Wasser füllen, um einen möglichst niedrigen Schwerpunkt zu erhalten? Begründen Sie ihre Antwort!

Lösung zu Aufgabe 6.1
Unsere Fragestellung ist ein konvexes Minimierungsproblem, mit einer strikt konvexen Zielfunktion. Damit gibt es in unserem eindimensionalen Definitionsbereich ein eindeutiges globales Minimum. Dieses wird genau dann angenommen, wenn der Schwerpunkt von Dose plus Wasser auf Höhe des Wasserfüllstandes ist. Wir beweisen die Aussage formal:

Aus der Rechnung in Aufgabe 5.1 entnehmen wir, dass die erste Ableitung der Zielfunktion gerade

$$\frac{1}{2}(2xv(xv+g)^{-1} - v(x^2v+g)(xv+g)^{-2})$$

ist. Im Optimalpunkt ist diese genau $= 0$, das ist der Fall, wenn

$$2xv(xv+g) = v(x^2v+g)$$

Wenn der Schwerpunkt der Dose gerade auf Füllhöhe liegt, gilt

$$\frac{1}{2}\frac{g+x^2v}{xv+g} = x$$

Aufgelöst ergibt dies $x_{1,2} = \frac{-g\pm\sqrt{g^2+vg}}{v}$, wovon nur $x = \frac{-g+\sqrt{g^2+vg}}{v} \in [0,1]$ ist.

Setzt man dieses x in obige Gleichung ein, erhält man

$$\begin{aligned}
& 2xv(xv+g) = x^2v^2 + vg \\
\Leftrightarrow \quad & 2(-g+\sqrt{g^2+vg})\sqrt{g^2+vg} = (-g+\sqrt{g^2+vg})^2 + vg \\
\Leftrightarrow \quad & -2g\sqrt{g^2+vg} + 2g^2 + 2vg = g^2 - 2g\sqrt{g^2+vg} + g^2 + vg + vg \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = 0
\end{aligned}$$

Damit ist x als Optimalpunkt nachgewiesen.

Aufgabe 6.2
Konstruieren Sie für jedes Paar $(i,j) \in \{0,1,\dots,n\}^2$ mit $i \leq j$ eine konvexe Funktion $\alpha_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\dim(\partial\alpha_{i,j}(0)) = i \text{ und } \dim(N_C(0)) = j$$

wobei $C = L_{\alpha_{i,j}}(0)$.

Lösung zu Aufgabe 6.2
Falls es unter unseren Voraussetzungen einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\alpha(x_0) < 0$, so gilt $\operatorname{pos}(\partial\alpha(0)) = N_C(0)$ nach Lemma 8.3.5. Dies müssen wir bei unserer Konstruktion beachten.

Sei $\alpha_{i,j}(x) := \sum_{k=1}^{i} |\xi_k| + \sum_{k=i+1}^{j} \xi_k^2$. Dann ist $\alpha_{i,j}(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_{i,j}$ ist konvex. Außerdem ist $L_{\alpha_{i,j}}(0) = \{0\}^j \times \mathbb{R}^{n-j}$. Jede Hyperebene durch 0, deren Normalenvektor senkrecht zu $\{0\}^j \times \mathbb{R}^{n-j}$ ist, ist eine Stützhyperebene an C. Wir erhalten $\dim N_C(0) = j$.

Wir definieren $\beta_{i,j} : \mathbb{R}^{n-i} \to \mathbb{R}$ durch $\beta_{i,j}(y) = \alpha_{i,j}(y')$ für $y \in \mathbb{R}^{n-i}$ und $y' = (0,y)^T \in \mathbb{R}^n$. $\beta_{i,j}$ ist differenzierbar, also gilt $\partial\beta_{i,j}(0) = \{0\} \subset \mathbb{R}^{n-i}$. Mit Aufgabe 5.2$a$) wissen wir, dass damit $\partial\alpha_{i,j}(0) := \{a = (a_1,\dots,a_n)^T \in \mathbb{R}^n : |a_k| \leq 1 \ \ \forall k \leq i, a_k = 0 \ \ \forall i+1 \leq k \leq n\}$. Es gilt also $\dim \partial(\alpha_{i,j}(0)) = i$.