Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung 3, SS 2009

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1

Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge von Punkten. Gesucht ist eine (euklidische) Kugel $B(x, r)$ mit Mittelpunkt x und minimalem Radius r, in der all diese Punkte enthalten sind.

a) Formulieren Sie das Problem als nichtlineares Optimierungsproblem mit quadratischen Nebenbedingungen und linearer Zielfunktion.

b) Beweisen Sie, dass dieses Problem eine eindeutige Lösung besitzt.

Lösung zu Aufgabe 7.1

a) Sei $P = \{p_1, \dots, p_m\}$. Gesucht sind x und r, so dass P in der Kugel $B(x, r)$ mit Radius r und Mittelpunkt x enthalten ist, also muss für alle $p \in P$ gelten: $\|p - x\| \leq r$. Die Zielfunktion besteht dann in der Minimierung von r, also: $\min\{r : \|p-x\| \leq r \; \forall p \in P\}$. Um quadratische Nebenbedingungen zu erhalten, betrachten wir das Problem $\min\{r^2 : \|p - x\|^2 \leq r^2 \; \forall p \in P \quad \wedge \quad r \geq 0\}$. Da r^2 genau dann minimal wird, wenn r minimal wird, können wir statt r^2 auch einfach r minimieren. Wir erhalten das gewünschte Optimierungsproblem als

$$\min\{r : \|p - x\|^2 \leq r^2 \; \forall p \in P\}$$

b) Wir zeigen zunächst die Existenz einer Lösung. Um alle Punkte in P einzuschließen, genügt auf jeden Fall eine Kugel vom Radius $\bar{r} := 2 \cdot \max_{p \in P} \|p\|$ um den Ursprung. Der Mittelpunkt einer optimalen Kugel wird andererseits nicht außerhalb der Kugel $B(0, \bar{r})$ liegen. Falls es also überhaupt eine Lösung gibt, so muss es auch eine Lösung (x, r) geben, für die $\|x\| \leq \bar{r}$, $r \leq \bar{r}$ gilt. Wir können uns also auf die Menge

$$\{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|p - x\|^2 \leq r^2 \; \forall p \in P \quad \wedge \; \|x\| \leq \bar{r} \; \wedge \; r \leq \bar{r}\}$$

beschränken. Diese ist offenbar beschränkt und wird durch Ungleichungen stetiger Funktionen beschrieben, damit ist sie auch abgeschlossen. Die Zielfunktion $(x, r) \mapsto r$ ist stetig auf dieser kompakten Menge, also nimmt sie dort ein Minimum an, das zeigt die Existenz einer Lösung.

Nehmen wir nun an, es gäbe zwei Optimallösungen (x_1^*, r^*) und (x_2^*, r^*). Da $\|{}^1\!/\!_2(x_1^* - p) + {}^1\!/\!_2(x_2^* - p)\|^2 \leq {}^1\!/\!_4\|x_1^* - p\|^2 + {}^1\!/\!_4\|x_2^* - p\|^2 + {}^2\!/\!_4\|x_1^* - p\|\|x_2^* - p\| \leq (r^*)^2$ für alle $p \in P$, ist auch $({}^1\!/\!_2(x_1^* + x_2^*), r)$ eine Optimallösung des Problems. Damit r^* nicht mehr verkleinert werden kann, muss es mindestens eine aktive Ungleichung geben, also ein $p^* \in P$ mit $\|{}^1\!/\!_2(x_1^* + x_2^*) - p^*\|^2 = (r^*)^2$. Unter Verwendung der Parallelogramm-Gleichung $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ folgt dann

$$\begin{aligned}(r^*)^2 &= \|{}^1\!/\!_2(x_1^* - p^*) + {}^1\!/\!_2(x_2^* - p^*)\|^2 \\ &= {}^1\!/\!_2\|x_1^* - p^*\|^2 + {}^1\!/\!_2\|x_2^* - p^*\|^2 - {}^1\!/\!_4\|x_1^* - x_2^*\|^2 \\ &\le (r^*)^2 - {}^1\!/\!_4\|x_1^* - x_2^*\|^2\end{aligned}$$

Damit folgt $\|x_1^* - x_2^*\| = 0$, also muss $x_1^* = x_2^*$ gelten.

Aufgabe 7.2

Betrachten Sie das folgende Problem:

$$\begin{array}{lll}\min & (x_1 - \frac{1}{2})^2 - x_2 & \\ & x_1^2 + x_2^2 - 1 & \le 0 \\ & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 & \le 0\end{array}$$

a) Zeigen Sie *elementar*, dass die Regularitätsbedingung für den Zulässigkeitsbereich F erfüllt ist.

b) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich, und erraten Sie den Optimalpunkt x^*.

c) Beweisen Sie die Optimalität Ihres Punktes durch Anwendung des Satzes von Karush-Kuhn-Tucker in der Kegelversion.

Lösung zu Aufgabe 7.2

a) Sei $x = (x_1, x_2)$. Die beiden Funktionen $\alpha_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ und $\alpha_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_2(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1$ und die Zielfunktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = (x_1 - \frac{1}{2})^2 - x_2$ sind als Summen konvexer Funktionen konvex. Wir zeigen im Folgenden also, dass der Zulässigkeitsbereich F die Bedingung $D_F(x^*) = N_F(x^*)$ für alle $x^* \in F$ erfüllt.

α_1, α_2 und φ sind als Summen differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Es gilt $\partial\alpha_1(x) = \{\alpha_1'(x)\} = \{(2x_1, 2x_2)^T\}$ und $\partial\alpha_2(x) = \{\alpha_2'(x)\} = \{(2(x_1 - 1), 2x_2)^T\}$, und damit $\operatorname{pos}\partial\alpha_1(x) = \{(x_1, x_2)^T \cdot \mathbb{R}\}$, $\operatorname{pos}\partial\alpha_2(x) = \{(x_1 - 1, x_2)^T \cdot \mathbb{R}\}$ und $\operatorname{pos}(\partial\alpha_1(x) \cup \partial\alpha_2(x)) = \{(x_1 - \lambda, x_2) \cdot \mathbb{R} : \lambda \in [0, 1]\}$.

Die beiden Nebenbedingungen beschreiben jeweils die euklidischen Einheitskugeln um $(0, 0)$ und $(1, 0)$. Es reicht, deren Randpunkte zu betrachten. Für jeden Randpunkt x^* in F, der nur auf dem Rand der Einheitskugel um $(0, 0)$ liegt, gilt $N_F(x^*) = \{(x_1, x_2)^T \cdot \mathbb{R}\}$, für jeden, der nur auf dem Rand der Einheitskugel um $(1, 0)$ liegt, gilt $N_F(x^*) = \{(x_1 - 1, x_2)^T \cdot \mathbb{R}\}$. Für die Schnittpunkte der beiden Einheitskugeln $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})^T$ und $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})^T$ gilt $N_F(x^*) = \operatorname{conv}\{\{(x_1, x_2)^T \cdot \mathbb{R}\}, \{(x_1 - 1, x_2)^T \cdot \mathbb{R}\}\} = \{(x_1 - \lambda, x_2) \cdot \mathbb{R} : \lambda \in [0, 1]\}$. Damit ist die Regularitätsbedingung erfüllt.

b) Der Zulässigkeitsbereich ist der Schnitt der beiden euklidischen Einheitskugeln um $(0,0)$ und $(1,0)$. Optimalpunkt ist offensichtlich der Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})^T$, da dieser sowohl den ersten Summanden als auch den zweiten Summanden der Zielfunktion minimal macht.

c) Mit $K = \mathbb{R}^n$, den Funktionen $\varphi, \alpha_1, \alpha_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F = L_{\alpha_1}(0) \cap L_{\alpha_2}(0)$ und $x^* \in F$ können wir Satz 8.3.12a) anwenden.

φ ist differenzierbar, daher gilt $\partial\varphi(x) = \{\varphi'(x)\} = \{(2(x_1 - \frac{1}{2}), -1)^T\}$. Im Punkt $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})^T$ ist also $\partial\varphi(x^*) = \{(0, -1)^T\}$. Wir wählen dementsprechend $a = (0, -1)^T$. Durch Wahl von $a_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})^T \in \partial\alpha_1(x^*)$ und $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, sowie $a_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})^T \in \partial\alpha_2(x^*)$ und $\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ gilt $a + \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 = 0$. Also ist x^* Minimalpunkt von φ über F.