Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung 3, SS 2009

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1

Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung, die mindestens eine Nullstelle besitzt.

a) Gibt es zu jedem g eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = g(x)$? (Die Nullstellen von g sind dann genau die stationären Punkte von f.)

b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an, deren globale Minima genau die Nullstellen von g sind.

c) Sind auch alle stationären Punkte der Funktion f aus b) schon Nullstellen von g? Geben Sie ggf. ein Gegenbeispiel an.

d) Zeigt Aufgabe b) eine praktikable Möglichkeit, ein globales Optimierungsproblem auf die Bestimmung von Nullstellen einer Funktion zurückzuführen?

Aufgabe 8.2

Seien die Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \alpha(x) := (\alpha_1(x)^T, \ldots, \alpha_m(x)^T)^T$ konvex und es gelte die Slater-Bedingung. Es gebe $x^* \geq 0 \in \mathbb{R}^n$ und $y^* \geq 0 \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Lambda_x(x^*) &\geq 0, \\ x^{*T}\frac{d}{dx}\Lambda_x(x^*) &= 0, \\ \frac{d}{dy}\Lambda_y(y^*) &\leq 0 \\ \text{sowie} \qquad y^{*T}\frac{d}{dy}\Lambda_y(y^*) &= 0. \end{aligned}$$

Hierbei seien

$$\Lambda_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \Lambda(x, y^*) = \varphi(x) + {y^*}^T\alpha(x)$$

und

$$\Lambda_y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ y \mapsto \Lambda(x^*, y) = \varphi(x^*) + y^T\alpha(x^*).$$

Beweisen Sie, dass x^* ein Minimalpunkt von φ über $F := \bigcap_{i=1}^{m} L_{\alpha_i}(0)$ ist.