Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung 3, SS 2009

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1
Betrachten Sie das folgende (nicht konvexe!) Problem:

$$\begin{array}{rcl} \min & x_1^2 - x_2^2 & \\ (x_1-2)^2 + x_2^2 - 4 & \leq & 0 \end{array}$$

a) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen (aus Korollar 8.3.25) für dieses Problem.

b) Bestimmen Sie alle Punkte, die die KKT-Bedingungen erfüllen. Was stellen Sie fest?

Lösung zu Aufgabe 9.1

a) Für $x = (x_1, x_2)^T$ benutzen wir $\varphi(x) = x_1^2 - x_2^2$ und $\alpha(x) = (x_1-2)^2 + x_2^2 - 4$. y sei geeignet aus $[0, \infty[$. Die KKT-Bedingungen aus 8.3.25 sind dann

$$\begin{array}{rcll} \alpha(x) & \leq & 0 & (1) \\ y\alpha(x) & = & 0 & (2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda(x_1, x_2, y) & = & 0 & (3) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\Lambda(x_1, x_2, y) & = & 0 & (4) \end{array}$$

Hierbei ist

$$\Lambda(x_1, x_2, y) = \varphi(x_1, x_2) + y\alpha(x) = x_1^2 - x_2^2 + y((x_1-2)^2 + x_2^2 - 4)$$

und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda(x_1, x_2, y) = 2x_1 + 2x_1y - 4y$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Lambda(x_1, x_2, y) = -2x_2 + 2yx_2$$

b) (1) beschränkt den Zulässigkeitsbereich auf den Kreis mit Radius 2 um den Punkt $(2, 0)$.

(2) erzwingt $y = 0$ für jeden inneren Punkt dieses Kreises. Durch (3) gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda(x_1, x_2, y) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2y}{1+y} \text{ und } y = \frac{x_1}{2 - x_1}$$

und damit insbesondere $x_1 \neq 2$.

Analog gilt durch (4)

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Lambda(x_1, x_2, y) = 0 \Leftrightarrow x_2(2y - 2) = 0$$

also ist entweder $x_2 = 0$, oder $y = 1$ (oder beides ist erfüllt). Letzteres ist wegen (2) nur bei einem Randpunkt des Kreises möglich.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Fall 1, $x_2 = 0$: (4) ist also erfüllt. Da (3) gelten muss, wissen wir, dass $x_1 \neq 2$ und $y = \frac{x_1}{2-x_1}$. Um (1) zu erfüllen, muss zudem $x_1 \in [0, 4]$ gelten. Mit (2) gilt $y\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 \frac{x_1 - 4}{2 - x_1} = 0$, also ist $x_1 = 0$ oder $x_1 = 4$. Insgesamt werden in diesem Fall die Bedingungen also von den beiden Punkten $(0, 0, 0)$ und $(4, 0, -2)$ erfüllt. (Man beachte, dass für letzteren $y \notin [0, \infty[$.)
- Fall 2, $x_2 \neq 0$: Um (4) zu erfüllen, muss also $y = 1$ sein. Wegen (2) gilt also $\alpha(x) = 0$, wir liegen auf dem Rand des Kreises, und erfüllen damit auch (1). Mit 3 folgt $x_1 = \frac{2y}{1+y} = 1$, und hiermit folgt $x_2^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \pm\sqrt{3}$, da nur ein Randpunkt möglich ist. Insgesamt werden in diesem Fall die Bedingungen also von den beiden Punkten $(1, \pm\sqrt{3}, 1)$ erfüllt.

Von den Punkten, die die KKT-Bedingungen erfüllen, sind nur die Punkte aus Fall 2 optimal. Bei nicht konvexen Zielfunktionen (oder Zulässigkeitsbereichen) sind die KKT-Bedingungen nicht hinreichend.

Aufgabe 9.2

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $k \in \mathbb{N}$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar.

Beweisen oder widerlegen Sie: Dann ist $\mathrm{conv}_I[\varphi](x)$ k-mal differenzierbar.

Lösung zu Aufgabe 9.2

Für $k = 1$ folgt die Behauptung im Wesentlichen mit Lemma 9.1.11, denn mit $C = I$ sagt dieses aus, dass, falls $\varphi(x_0) = \mathrm{conv}_I[\varphi](x_0)$ für ein $x_0 \in I$ gilt, auch $(\mathrm{conv}_I[\varphi])'(x_0) = \varphi'(x_0)$ ist. Ist $\varphi(x_0) > \mathrm{conv}_I[\varphi](x_0)$, so ist $(\mathrm{conv}_I[\varphi])'(x_0)$ gleich einer reellwertigen Konstante.

Für $k > 1$ widerlegen wir die Behauptung durch ein Gegenbeispiel. Seien $I :=]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $\varphi(x) := \cos(x)$ (beliebig oft stetig differenzierbar) und $x_0 := \pi$. Dann gilt $\mathrm{conv}_I[\varphi](x) = \varphi(x)$ für $x \in]-\frac{3\pi}{2}, -\pi] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}[$ und $\mathrm{conv}_I[\varphi](x) = -1$ für $x \in [-\pi, \pi]$. Es ist $\varphi''(x_0) = 1$, aber $\mathrm{conv}_I[\varphi](x)$ ist für alle $x \in [-\pi, x_0]$ konstant. Da $\mathrm{conv}_I[\varphi](x) = \varphi(x)$ für $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}[$ gilt, ist $\mathrm{conv}_I[\varphi](x)$ also nicht zwei mal differenzierbar.