Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung 3, SS 2009

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

a) Seien $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\varphi : C \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\inf_{x \in C} \varphi(x) = \inf_{x \in C} \operatorname{conv}_C[\varphi](x)$$

b) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) := x^4 - x^2 + x$. Berechnen Sie $\operatorname{conv}[\varphi]$.

Lösung zu Aufgabe 10.2

a) Nach 9.1.3 wissen wir, dass $\operatorname{conv}_C[\varphi](x) \leq \varphi(x)$ für alle $x \in C$. Damit folgt $\inf\limits_{x \in C} \operatorname{conv}_C[\varphi](x) \leq \inf\limits_{x \in C} \varphi(x)$. Wir zeigen nun $\inf\limits_{x \in C} \operatorname{conv}_C[\varphi](x) \geq \inf\limits_{x \in C} \varphi(x)$ durch Betrachtung von $epi_C(\varphi)$ und $epi_C(\operatorname{conv}[\varphi])$.

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\varphi^* = \inf\limits_{x \in C} \varphi(x)$. Dann gilt $epi_C(\varphi) \subset H^{\geq}_{u_{n+1},\varphi^*} := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \geq \varphi^*\}$ und, da $H^{\geq}_{u_{n+1},\varphi^*}$ abgeschlossen und konvex ist, auch $cl(\operatorname{conv}(epi_C(\varphi))) \subset H^{\geq}_{u_{n+1},\varphi^*}$. Nach Lemma 9.1.6 wissen wir, dass $epi_C(\operatorname{conv}[\varphi]) \subset cl(\operatorname{conv}(epi_C(\varphi)))$, also ist auch $epi_C(\operatorname{conv}[\varphi]) \subset H^{\geq}_{u_{n+1},\varphi^*}$ und damit $\inf\limits_{x \in C} \operatorname{conv}[\varphi](x) \geq \varphi^*$ für alle $x \in C$.

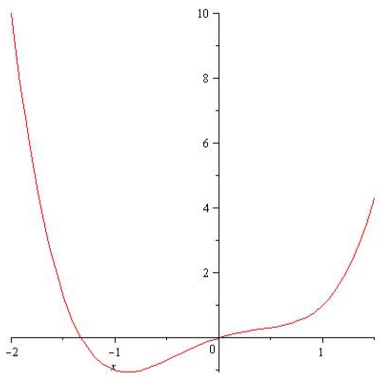

Abbildung 1: $\varphi(x) := x^4 - x^2 + x$

b) φ ist ein Polynom vierten Grades. Für gewisse $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dominiert $-x^2$ im Intervall $[x_1, x_2]$ den (dort konkaven) Verlauf der Funktion, für $]-\infty, x_1]$ und $[x_2, \infty[$ dominiert x^4 den (dort konvexen) Verlauf der Funktion. $\mathrm{conv}[\varphi]$ erhalten wir daher, indem wir x_1 und x_2 bestimmen, und für das Intervall $[x_1, x_2]$ die Tangente an $\varphi(x_1)$ und $\varphi(x_2)$ benutzen. Außerhalb dieses Intervalls übernehmen wir einfach nur den Funktionswert von φ.

Es gilt $\varphi'(x) = 4x^3 - 2x + 1$. Wir suchen nach einer Tangente an φ in den zwei Punkten x_1 und x_2. Daher setzen wir an

$$\varphi'(x_1) = \varphi'(x_2) = \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Wir benutzen zunächst $\varphi'(x_1) = \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}$ und sehen

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)(4x_1^3 - 2x_1 + 1) &= x_2^4 - x_2^2 + x_2 - x_1^4 + x_1^2 - x_1 \\ (x_2 - x_1)(4x_1^3 - 2x_1) &= x_2^4 - x_2^2 - x_1^4 + x_1^2 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $x_2^4 - x_2^2 - x_1^4 + x_1^2 = 0$ für $x_1 = x_2$. Eine Faktorisierung der rechten Seite ergibt

$$x_2^4 - x_2^2 - x_1^4 + x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2^3 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 + x_1^3 - x_2 - x_1)$$

und somit

$$\begin{aligned} 4x_1^3 - 2x_1 &= x_2^3 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 + x_1^3 - x_2 - x_1 \\ 3x_1^3 - x_1 - x_2^3 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist erneut $3x_1^3 - x_1 - x_2^3 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 + x_2 = 0$ für $x_1 = x_2$. Eine weitere Faktorisierung ergibt

$$3x_1^3 - x_1 - x_2^3 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 + x_2 = (x_2 - x_1)(-x_2^2 - 2x_1 x_2 - 3x_1^2 + 1)$$

und wir müssen nun $x_2^2 + 2x_1 x_2 + (3x_1^2 - 1) = 0$ setzen. Es gilt

$$x_2 = \frac{-2x_1 \pm \sqrt{4x_1^2 - 4(3x_1^2 - 1)}}{2} = -x_1 \pm \sqrt{-2x_1^2 + 1}$$

und

$$-2x_1^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x_1^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x_1| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Benutzt man analog $\varphi'(x_2) = \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}$, so erhält man

$$x_1 = -x_2 \pm \sqrt{-2x_2^2 + 1}, |x_2| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Mit weiteren Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 \pm \sqrt{-2x_2^2 + 1} \\ \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 &= -2x_2^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_1 \pm \sqrt{-2x_1^2+1} \\ \Rightarrow (x_1+x_2)^2 &= -2x_1^2+1 \\ \Leftrightarrow 3x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-1 &= 0 \end{aligned}$$

und zusammen

$$2x_1^2 - 2x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$$

und da sicherlich $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$ sind, folgt $x_1 = -x_2$. Damit muss $-2x_1^2 + 1 = -2x_2^2 + 1 = 0$ gelten. Wir erhalten also als Intervallgrenzen die Werte $x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Mit $\varphi(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\varphi(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist die gesuchte Tangente $t(x) := x - \frac{1}{4}$.

Insgesamt ergibt sich $\operatorname{conv}[\varphi](x) = \varphi(x)$ für $x \leq -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $x \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\operatorname{conv}[\varphi](x) = x - \frac{1}{4}$ für $x \in [-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}]$.

Aufgabe 10.2

a) Beweisen Sie Satz 9.1.15a) mit Hilfe des Satzes von Taylor.

b) Bestimmen Sie für $j \in \mathbb{N}$ das j-te Taylor-Polynom der Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) := 0$ für $x \leq 0$ und $\varphi(x) := e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$ im Nullpunkt. Was stellen Sie fest?

Lösung zu Aufgabe 10.2

a) Für ein beliebiges $x \in U$ folgt mittels Taylor-Entwicklung nach 9.1.16 die Existenz eines $\gamma \in]0,1[$, so dass mit $y := x^* + \gamma(x - x^*)$

$$\varphi(x) - \varphi(x^*) = \frac{1}{2}(x - x^*)^T \varphi''(y)(x - x^*)$$

gilt. Da $\varphi''(y)$ nach Voraussetzung positiv semidefinit ist, folgt $\varphi(x) - \varphi(x^*) \geq 0$, also ist x^* ein lokales Minimum von φ.

b) Es gilt $\lim\limits_{x \to 0_+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0_+} \varphi'(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} -\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$. Analog kann man zeigen, dass für $j \in \mathbb{N}$ $\varphi^{(j)}(0) = 0$, φ ist also beliebig oft stetig differenzierbar. Es sind allerdings alle Taylor-Polynome (und die Taylor-Reihe) gleich 0, und damit ungeeignete Approximationen für $\varphi(x)$ in einer beliebigen Umgebung um den Nullpunkt.