Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung 3, SS 2009

Übungsblatt 13

Das Blatt dient zur selbstständigen Wiederholung einiger Vorlesungsinhalte. Ein Lösungsvorschlag wird in der letzten Vorlesungswoche auf die Homepage zur Vorlesung gestellt.

Aufgabe 13.1

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann ist $|f|$ definiert durch $|f|(x) := |f(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe, beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die Richtungsableitung $f'(x; s)$ eine konvexe Funktion.
Hinweis: Beachten Sie, dass sowohl x als auch s freie Variablen sind.

Aufgabe 13.2
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sin |x|$.

a) Skizzieren Sie den Epigraphen von f. Ist f differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie $\operatorname{conv}[f]$.

Aufgabe 13.3
Betrachten Sie das folgende nichtlineare Optimierungsproblem P:

$$\begin{array}{rcc} \min & x_1^5 + x_2^2 & \\ x_1 & \geq & 1 \\ x_2 & \geq & 1 \\ x_1 + x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

a) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich C von P und zeigen Sie die Gültigkeit der Slater-Bedingung.

b) Zeigen Sie, dass P ein konvexes Optimierungsproblem ist.

c) Berechnen Sie für alle Randpunkte x von C den Subdifferentialkegel $D_C(x)$.

d) Stellen Sie die KKT-Bedingungen in Sattelpunktform für P auf.

e) Zeigen Sie die Optimalität des Punktes $x^* = (1, 1)^T$ für P.

Bitte wenden!

Aufgabe 13.4
Betrachten Sie das Problem $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2$ für $x = (\xi_1, \xi_2)^T$. Sei ferner $x_0 := (1, 1)^T$.

a) Führen Sie den ersten Schritt des Gradientenverfahrens mit Startpunkt x_0 und exakter Schrittweitenbestimmung durch.

b) Führen Sie den ersten Schritt des Gradientenverfahrens mit Startpunkt x_0 und Schrittweitenbestimmung nach der Armijo-Regel mit $\rho = \beta = \frac{1}{2}$ und $\gamma = 1$ durch.

c) Bestimmen Sie für den ersten Schritt eines Gradientenverfahrens mit Startpunkt x_0 alle Schrittweiten, die den Wolfe-Powell-Bedingungen (in Abhängigkeit von $0 < \rho < \kappa < 1$) genügen.

Aufgabe 13.5
Sie arbeiten für eine große Konsumgüterfirma, die künftig auch im Ausland Fuß fassen möchte. Dazu wurden bereits Verträge mit m Einzelhandelsunternehmen abgeschlossen, für die Standorte $y_1, \ldots, y_m$ und die gewünschte Liefermengen $b_1, \ldots, b_m$ bekannt sind. Die Marketingexperten Ihres Unternehmens haben bereits eine strategische Planung ausgearbeitet, die n Produktionsstätten mit Produktionskapazitäten $a_1, \ldots, a_n$ im Ausland vorsieht. Von diesen Standorten aus müssen die Einzelhändler beliefert werden, die Lieferkosten sind dabei proportional zur (euklidischen) Distanz und zur Liefermenge (es gelte also $Kosten = Distanz \cdot Menge$). Mit der Auswahl der Standorte $x_1, \ldots, x_n$ und der Planung der Liefermengen m_{ij} von Standort i zum Einzelhändler j haben sich die Planer bisher aber nicht befasst.

Formulieren Sie das Problem, die Standorte und Liefermengen zu bestimmen, als nichtlineares Optimierungsproblem.