



# Propädeutikum Diskrete Mathematik

## Breitensuche

Prof. Dr. R. Hemmecke  
B.Sc. W.F. Riedl    Dipl-Math. M. Silbernagl

Technische Universität München

WS 2013/14



# For-Schleife

---

**Input** :  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{R}$

**Output** :  $p = a^n$

```
1  $p \leftarrow 1$ ;  
2 for  $i = 1$  to  $n$  do  
3   |  $p \leftarrow p \cdot a$  ;  
   end
```

---



# While-Schleife

---

**Input** :  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{R}$

**Output** :  $s = \sum_{i=1}^n a^i$

```
1  $s \leftarrow 0$ ;  
2  $i \leftarrow 1$ ;  
3 while  $i \leq n$  do  
4   |    $s \leftarrow s + a^i$ ;  
5   |    $i \leftarrow i + 1$ ;  
   end
```

---



# Warteschlange/Queue I

## Definition

Eine Warteschlange/Queue  $Q$  ist eine Folge von Elementen mit den folgenden beiden Operationen:

- $\text{Enqueue}(Q, u)$ : Füge das Element  $u$  am Ende der Folge ein.
- $v \leftarrow \text{Dequeue}(Q)$ : Speichere das erste Element von  $Q$  als  $v$  ab und entferne es aus  $Q$ .



# Warteschlange/Queue II

## Beispiel

Befehl	Warteschlange $Q$
	(1, 5, 7)
$v \leftarrow \text{Dequeue}(Q)$	(5, 7) und $v = 1$
$\text{Enqueue}(Q, 6)$	(5, 7, 6)
$\text{Enqueue}(Q, 8)$	(5, 7, 6, 8)
$v \leftarrow \text{Dequeue}(Q)$	(7, 6, 8) und $v = 5$

# Breitensuche (BFS)

---

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

**Output** : Funktionen  $\text{bekannt} : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\text{Abstand} : V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $\text{Vorgänger} : V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```
1  $Q \leftarrow (u)$ ;  
2  $\text{bekannt}(u) \leftarrow 1$ ,  $\text{Abstand}(u) \leftarrow 0$ ;  
3 for  $w \in V \setminus \{u\}$  do  
4   |    $\text{bekannt}(w) \leftarrow 0$ ;  
5   |    $\text{Abstand}(w) \leftarrow \infty$ ;  
6 end  
7 while  $Q \neq \emptyset$  do  
8   |    $v \leftarrow \text{Dequeue}(Q)$ ;  
9   |   for  $w \in N(v)$  mit  $\text{bekannt}(w) = 0$  do  
10  |   |    $\text{Enqueue}(Q, w)$ ;  
11  |   |    $\text{bekannt}(w) \leftarrow 1$ ;  
12  |   |    $\text{Abstand}(w) \leftarrow \text{Abstand}(v) + 1$ ;  
    |   |    $\text{Vorgänger}(w) \leftarrow v$ ;  
    |   end  
7 end
```

---

---

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

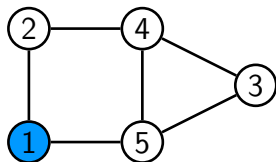
Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← (u);
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```

---



**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

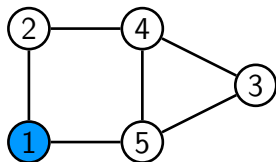
**Output** : Funktionen  $\text{bekannt} : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← (u);
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```



$Q = ()$

$v$	$\text{bekannt}(v)$	$\text{Abst.}(v)$	$\text{Vorg.}(v)$
1			
2			
3			
4			
5			



**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

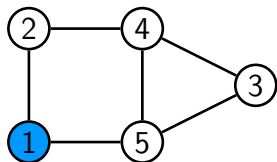
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← {u};
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```



$$Q = \{1\}$$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1			
2			
3			
4			
5			

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

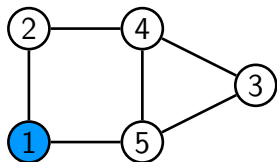
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← (u);
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
6  while Q ≠ ∅ do
7      |   v ← Dequeue(Q);
8      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
9          |   |   Enqueue(Q, w);
10         |   |   bekannt(w) ← 1;
11         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
12         |   |   Vorgänger(w) ← v;
13     end
14 end
    
```



$Q = (1)$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1	1	0	
2	0	$\infty$	
3	0	$\infty$	
4	0	$\infty$	
5	0	$\infty$	

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

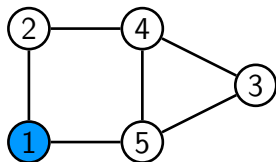
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← (u);
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```



$Q = ()$ ,  $v = 1$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1	1	0	
2	0	$\infty$	
3	0	$\infty$	
4	0	$\infty$	
5	0	$\infty$	

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

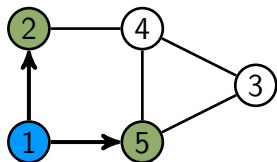
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← (u);
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```



$$Q = (2, 5), v = 1$$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1	1	0	
2	1	1	1
3	0	$\infty$	
4	0	$\infty$	
5	1	1	1

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

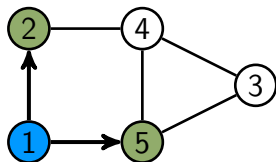
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← (u);
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```



$Q = (5), v = 2$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1	1	0	
2	1	1	1
3	0	$\infty$	
4	0	$\infty$	
5	1	1	1

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

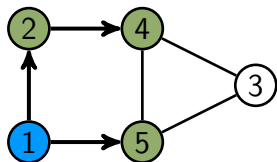
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1   $Q \leftarrow (u)$ ;
2   $\text{bekannt}(u) \leftarrow 1, \text{Abstand}(u) \leftarrow 0$ ;
3  for  $w \in V \setminus \{u\}$  do
4       $\text{bekannt}(w) \leftarrow 0$ ;
5       $\text{Abstand}(w) \leftarrow \infty$ ;
6  end
7  while  $Q \neq \emptyset$  do
8       $v \leftarrow \text{Dequeue}(Q)$ ;
9      for  $w \in N(v)$  mit  $\text{bekannt}(w) = 0$  do
10          $\text{Enqueue}(Q, w)$ ;
11          $\text{bekannt}(w) \leftarrow 1$ ;
12          $\text{Abstand}(w) \leftarrow \text{Abstand}(v) + 1$ ;
13          $\text{Vorgänger}(w) \leftarrow v$ ;
14     end
15 end
    
```



$$Q = (5, 4), v = 2$$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1	1	0	
2	1	1	1
3	0	$\infty$	
4	1	2	2
5	1	1	1

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

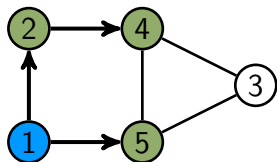
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← {u};
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```



$Q = (4), v = 5$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1	1	0	
2	1	1	1
3	0	$\infty$	
4	1	2	2
5	1	1	1

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

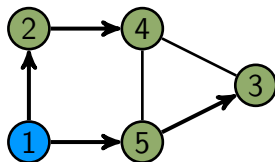
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← {u};
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```



$Q = (4, 3), v = 5$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1	1	0	
2	1	1	1
3	1	2	5
4	1	2	2
5	1	1	1



**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

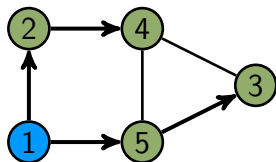
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← {u};
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```



$Q = \{3\}, v = 4$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1	1	0	
2	1	1	1
3	1	2	5
4	1	2	2
5	1	1	1

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

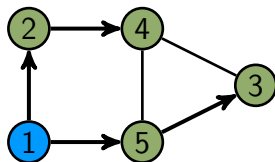
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← {u};
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```



$Q = (3), v = 4$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1	1	0	
2	1	1	1
3	1	2	5
4	1	2	2
5	1	1	1

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

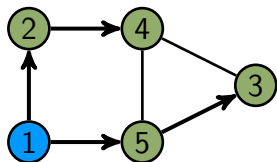
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← (u);
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```



$Q = ()$ ,  $v = 3$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1	1	0	
2	1	1	1
3	1	2	5
4	1	2	2
5	1	1	1

**Input** : Graph  $G = (V, E)$ , Startknoten  $u \in V$

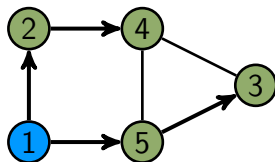
**Output** : Funktionen bekannt :  $V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

Abstand :  $V \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,

Vorgänger :  $V \setminus \{u\} \rightarrow V$

```

1  Q ← {u};
2  bekannt(u) ← 1, Abstand(u) ← 0;
3  for w ∈ V \ {u} do
4      |   bekannt(w) ← 0;
5      |   Abstand(w) ← ∞;
6  end
7  while Q ≠ ∅ do
8      |   v ← Dequeue(Q);
9      |   for w ∈ N(v) mit bekannt(w) = 0 do
10         |   |   Enqueue(Q, w);
11         |   |   bekannt(w) ← 1;
12         |   |   Abstand(w) ← Abstand(v) + 1;
13         |   |   Vorgänger(w) ← v;
14     end
15 end
    
```



$Q = ()$ ,  $v = 3$

$v$	bekannt( $v$ )	Abst. ( $v$ )	Vorg. ( $v$ )
1	1	0	
2	1	1	1
3	1	2	5
4	1	2	2
5	1	1	1



# Zwischenergebnisse

Zeile	$Q$	$v$	Neue Knoten $w$ mit $\text{bekannt}(w) = 1$	Abstand( $w$ )	Vorgänger( $w$ )
2	(1)	–	1	0	
7	()	1			
12	(2, 5)	1	2 5	1 1	1 1
7	(5)	2			
12	(5, 4)	2	4	2	2
7	(4)	5			
12	(4, 3)	5	3	2	5
7	(3)	4			
12	(3)	4			
7	()	3			
12	()	3			