Propädeutikum Diskrete Mathematik

Dijkstra-Algorithmus

Prof. Dr. R. Hemmecke
B.Sc. W.F. Riedl   Dipl-Math. M. Silbernagl

Technische Universität München

WS 2013/14

Gewichteter Graph

$G = (V, E, l)$ ist ein gewichteter Graph, wenn $G = (V, E)$ ein Graph ist und $l : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion ist.
Für $H = (W, F) \subset G$ ist

$$l(H) = \sum_{e \in F} l(e).$$

Gewichteter Graph

$G = (V, E, l)$ ist ein gewichteter Graph, wenn $G = (V, E)$ ein Graph ist und $l : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion ist.
Für $H = (W, F) \subset G$ ist

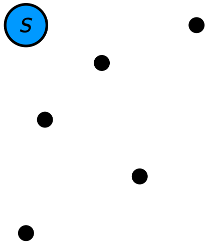
$$l(H) = \sum_{e \in F} l(e).$$

Kürzester Weg

Sei $G = (V, E, l)$ ein gewichteter Graph mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Für $s, t \in V$ ist P ein kürzester s, t-Weg, falls

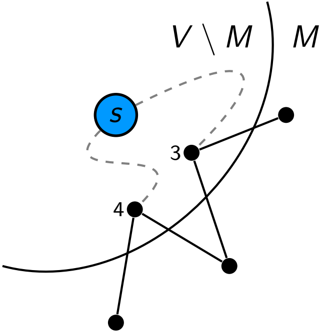
$$l(P) := \min\{l(P') \mid P' \text{ ist ein } s, t\text{-Weg in } G\}.$$

Algorithmus von Dijkstra – Idee



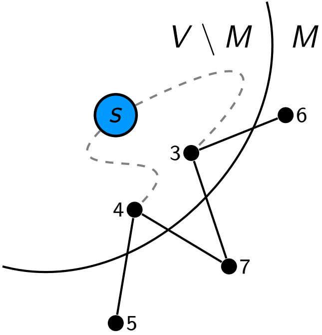
Algorithmus von Dijkstra – Idee

- M: Menge noch zu bearbeitender Knoten.
- $V \setminus M$: Knoten mit bekanntem kürzesten Weg von s.



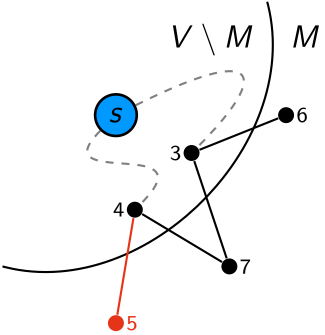
Algorithmus von Dijkstra – Idee

- M: Menge noch zu bearbeitender Knoten.
- $V \setminus M$: Knoten mit bekanntem kürzesten Weg von s.



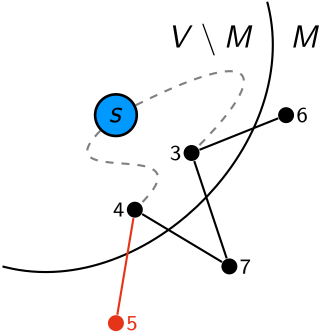
Algorithmus von Dijkstra – Idee

- M: Menge noch zu bearbeitender Knoten.
- $V \setminus M$: Knoten mit bekanntem kürzesten Weg von s.
- Folge der Kante, welche kürzesten Streckenabschnitt von Startknoten garantiert.



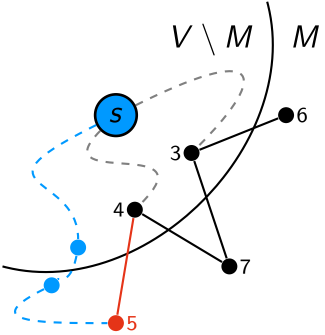
Algorithmus von Dijkstra – Idee

- M: Menge noch zu bearbeitender Knoten.
- $V \setminus M$: Knoten mit bekanntem kürzesten Weg von s.
- Folge der Kante, welche kürzesten Streckenabschnitt von Startknoten garantiert.
- Dies muss kürzesten Weg von s ergeben, sonst Widerspruch (wegen $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$).



Algorithmus von Dijkstra – Idee

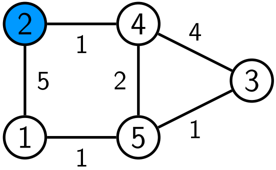
- M: Menge noch zu bearbeitender Knoten.
- $V \setminus M$: Knoten mit bekanntem kürzesten Weg von s.
- Folge der Kante, welche kürzesten Streckenabschnitt von Startknoten garantiert.
- Dies muss kürzesten Weg von s ergeben, sonst Widerspruch (wegen $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$).



Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$

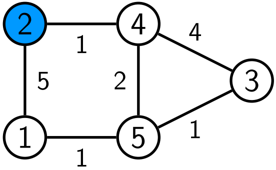
Output : Funktionen $\text{Dist} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,
Vorgänger : $V \setminus \{s\} \to V$

for $x \in V \setminus \{s\}$ **do**
    $\text{Dist}(x) \leftarrow \infty$;
end
$\text{Dist}(s) \leftarrow 0$;
$M \leftarrow V$;
while $M \neq \emptyset$ **do**
    $x \leftarrow$ Knoten in M mit min. Dist-Wert;
    $M \leftarrow M \setminus \{x\}$;
    for $y \in N(x) \cap M$ **do**
        if $\text{Dist}(x) + l(\{x, y\}) < \text{Dist}(y)$ **then**
            $\text{Dist}(y) \leftarrow \text{Dist}(x) + l(\{x, y\})$;
            $\text{Vorgänger}(y) \leftarrow x$;
        end
    end
end



Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$
Output : Funktionen Dist : $V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,
Vorgänger : $V \setminus \{s\} \to V$

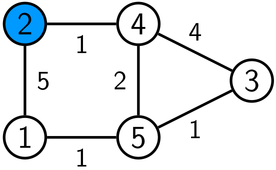
```
for x ∈ V \ {s} do
    Dist(x) ← ∞;
end
Dist(s) ← 0;
M ← V;
while M ≠ ∅ do
    x ← Knoten in M mit min. Dist-Wert;
    M ← M \ {x};
    for y ∈ N(x) ∩ M do
        if Dist(x) + l({x, y}) < Dist(y) then
            Dist(y) ← Dist(x) + l({x, y});
            Vorgänger(y) ← x;
        end
    end
end
```



	Dist()				
x	1	2	3	4	5

Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$
Output : Funktionen Dist : $V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,
Vorgänger : $V \setminus \{s\} \to V$

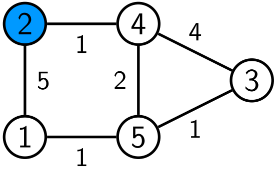
for $x \in V \setminus \{s\}$ **do**
    $\text{Dist}(x) \leftarrow \infty$;
end
$\text{Dist}(s) \leftarrow 0$;
$M \leftarrow V$;
while $M \neq \emptyset$ **do**
    $x \leftarrow$ Knoten in M mit min. Dist-Wert;
    $M \leftarrow M \setminus \{x\}$;
    for $y \in N(x) \cap M$ **do**
        if $\text{Dist}(x) + l(\{x, y\}) < \text{Dist}(y)$ **then**
            $\text{Dist}(y) \leftarrow \text{Dist}(x) + l(\{x, y\})$;
            $\text{Vorgänger}(y) \leftarrow x$;
        end
    end
end



	Dist()				
x	1	2	3	4	5
–	∞	0	∞	∞	∞

Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$
Output : Funktionen Dist : $V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,
Vorgänger : $V \setminus \{s\} \to V$

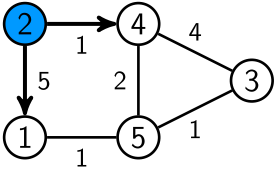
for $x \in V \setminus \{s\}$ **do**
  $\text{Dist}(x) \leftarrow \infty$;
end
$\text{Dist}(s) \leftarrow 0$;
$M \leftarrow V$;
while $M \neq \emptyset$ **do**
  $x \leftarrow$ Knoten in M mit min. Dist-Wert;
  $M \leftarrow M \setminus \{x\}$;
  for $y \in N(x) \cap M$ **do**
    if $\text{Dist}(x) + l(\{x, y\}) < \text{Dist}(y)$ **then**
      $\text{Dist}(y) \leftarrow \text{Dist}(x) + l(\{x, y\})$;
      $\text{Vorgänger}(y) \leftarrow x$;
    end
  end
end



	Dist()				
x	1	2	3	4	5
–	∞	0	∞	∞	∞
2					

Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$
Output : Funktionen $\text{Dist} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,
Vorgänger : $V \setminus \{s\} \to V$

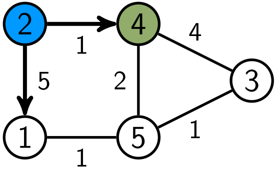
```
for x ∈ V \ {s} do
    Dist(x) ← ∞;
end
Dist(s) ← 0;
M ← V;
while M ≠ ∅ do
    x ← Knoten in M mit min. Dist-Wert;
    M ← M \ {x};
    for y ∈ N(x) ∩ M do
        if Dist(x) + l({x, y}) < Dist(y) then
            Dist(y) ← Dist(x) + l({x, y});
            Vorgänger(y) ← x;
        end
    end
end
```



	Dist()				
x	1	2	3	4	5
–	∞	0	∞	∞	∞
2	5		∞	1	∞

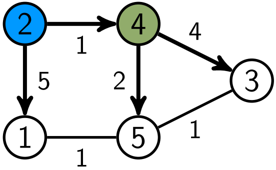
Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$
Output : Funktionen $\mathrm{Dist} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,
Vorgänger : $V \setminus \{s\} \to V$

for $x \in V \setminus \{s\}$ **do**
  $\mathrm{Dist}(x) \leftarrow \infty$;
end
$\mathrm{Dist}(s) \leftarrow 0$;
$M \leftarrow V$;
while $M \neq \emptyset$ **do**
  $x \leftarrow$ Knoten in M mit min. Dist-Wert;
  $M \leftarrow M \setminus \{x\}$;
  for $y \in N(x) \cap M$ **do**
    if $\mathrm{Dist}(x) + l(\{x, y\}) < \mathrm{Dist}(y)$ **then**
      $\mathrm{Dist}(y) \leftarrow \mathrm{Dist}(x) + l(\{x, y\})$;
      $\mathrm{Vorgänger}(y) \leftarrow x$;
    end
  end
end



	Dist()				
x	1	2	3	4	5
–	∞	0	∞	∞	∞
2	5		∞	1	∞
4					

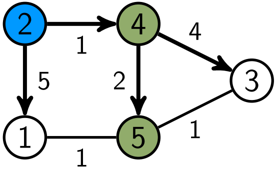
```
Input : Gew. Graph G = (V, E, l), s ∈ V
Output : Funktionen Dist : V → ℝ≥0 ∪ {∞},
         Vorgänger : V \ {s} → V
for x ∈ V \ {s} do
    Dist(x) ← ∞;
end
Dist(s) ← 0;
M ← V;
while M ≠ ∅ do
    x ← Knoten in M mit min. Dist-Wert;
    M ← M \ {x};
    for y ∈ N(x) ∩ M do
        if Dist(x) + l({x, y}) < Dist(y) then
            Dist(y) ← Dist(x) + l({x, y});
            Vorgänger(y) ← x;
        end
    end
end
```



	Dist()				
x	1	2	3	4	5
–	∞	0	∞	∞	∞
2	5		∞	1	∞
4	5		5		3

Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$
Output : Funktionen Dist : $V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,
Vorgänger : $V \setminus \{s\} \to V$

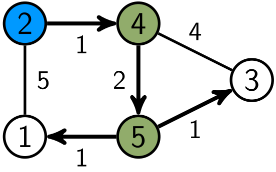
for $x \in V \setminus \{s\}$ **do**
    $\mathrm{Dist}(x) \leftarrow \infty$;
end
$\mathrm{Dist}(s) \leftarrow 0$;
$M \leftarrow V$;
while $M \neq \emptyset$ **do**
    $x \leftarrow$ Knoten in M mit min. Dist-Wert;
    $M \leftarrow M \setminus \{x\}$;
    for $y \in N(x) \cap M$ **do**
        if $\mathrm{Dist}(x) + l(\{x, y\}) < \mathrm{Dist}(y)$ **then**
            $\mathrm{Dist}(y) \leftarrow \mathrm{Dist}(x) + l(\{x, y\})$;
            $\mathrm{Vorgänger}(y) \leftarrow x$;
        end
    end
end



	Dist()				
x	1	2	3	4	5
–	∞	0	∞	∞	∞
2	5		∞	1	∞
4	5		5		3
5					

Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$
Output : Funktionen $\text{Dist} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,
Vorgänger : $V \setminus \{s\} \to V$

for $x \in V \setminus \{s\}$ **do**
    $\text{Dist}(x) \leftarrow \infty$;
end
$\text{Dist}(s) \leftarrow 0$;
$M \leftarrow V$;
while $M \neq \emptyset$ **do**
    $x \leftarrow$ Knoten in M mit min. Dist-Wert;
    $M \leftarrow M \setminus \{x\}$;
    for $y \in N(x) \cap M$ **do**
        if $\text{Dist}(x) + l(\{x, y\}) < \text{Dist}(y)$ **then**
            $\text{Dist}(y) \leftarrow \text{Dist}(x) + l(\{x, y\})$;
            $\text{Vorgänger}(y) \leftarrow x$;
        end
    end
end



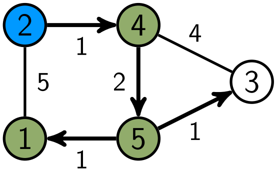
	Dist()				
x	1	2	3	4	5
–	∞	0	∞	∞	∞
2	5		∞	1	∞
4	5		5		3
5	4		4		

Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$

Output : Funktionen $\mathrm{Dist} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,

Vorgänger : $V \setminus \{s\} \to V$

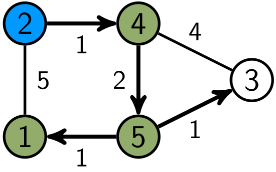
```
for x ∈ V \ {s} do
    Dist(x) ← ∞;
end
Dist(s) ← 0;
M ← V;
while M ≠ ∅ do
    x ← Knoten in M mit min. Dist-Wert;
    M ← M \ {x};
    for y ∈ N(x) ∩ M do
        if Dist(x) + l({x, y}) < Dist(y) then
            Dist(y) ← Dist(x) + l({x, y});
            Vorgänger(y) ← x;
        end
    end
end
```



	Dist()				
x	1	2	3	4	5
–	∞	0	∞	∞	∞
2	5		∞	1	∞
4	5		5		3
5	4		4		
1					

Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$
Output : Funktionen Dist : $V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,
Vorgänger : $V \setminus \{s\} \to V$

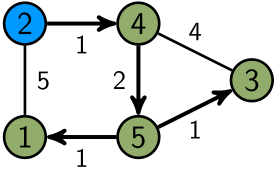
for $x \in V \setminus \{s\}$ **do**
  Dist$(x) \leftarrow \infty$;
end
Dist$(s) \leftarrow 0$;
$M \leftarrow V$;
while $M \neq \emptyset$ **do**
  $x \leftarrow$ Knoten in M mit min. Dist-Wert;
  $M \leftarrow M \setminus \{x\}$;
  for $y \in N(x) \cap M$ **do**
    if Dist$(x) + l(\{x, y\}) <$ Dist(y) **then**
      Dist$(y) \leftarrow$ Dist$(x) + l(\{x, y\})$;
      Vorgänger$(y) \leftarrow x$;
    end
  end
end



	Dist()				
x	1	2	3	4	5
–	∞	0	∞	∞	∞
2	5		∞	1	∞
4	5		5		3
5	4		4		
1			4		

Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$
Output : Funktionen $\mathrm{Dist} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,
Vorgänger : $V \setminus \{s\} \to V$

for $x \in V \setminus \{s\}$ **do**
    $\mathrm{Dist}(x) \leftarrow \infty$;
end
$\mathrm{Dist}(s) \leftarrow 0$;
$M \leftarrow V$;
while $M \neq \emptyset$ **do**
    $x \leftarrow$ Knoten in M mit min. Dist-Wert;
    $M \leftarrow M \setminus \{x\}$;
    for $y \in N(x) \cap M$ **do**
        if $\mathrm{Dist}(x) + l(\{x, y\}) < \mathrm{Dist}(y)$ **then**
            $\mathrm{Dist}(y) \leftarrow \mathrm{Dist}(x) + l(\{x, y\})$;
            $\mathrm{Vorgänger}(y) \leftarrow x$;
        end
    end
end



	Dist()				
x	1	2	3	4	5
–	∞	0	∞	∞	∞
2	5		∞	1	∞
4	5		5		3
5	4		4		
1			4		
3					

Input : Gew. Graph $G = (V, E, l)$, $s \in V$

Output : Funktionen $\text{Dist} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$,

$\text{Vorgänger} : V \setminus \{s\} \to V$

for $x \in V \setminus \{s\}$ **do**

  $\text{Dist}(x) \leftarrow \infty$;

end

$\text{Dist}(s) \leftarrow 0$;

$M \leftarrow V$;

while $M \neq \emptyset$ **do**

  $x \leftarrow$ Knoten in M mit min. Dist-Wert;

  $M \leftarrow M \setminus \{x\}$;

  for $y \in N(x) \cap M$ **do**

    if $\text{Dist}(x) + l(\{x, y\}) < \text{Dist}(y)$ **then**

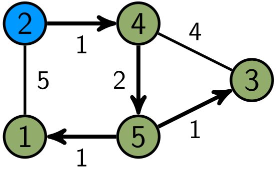
      $\text{Dist}(y) \leftarrow \text{Dist}(x) + l(\{x, y\})$;

      $\text{Vorgänger}(y) \leftarrow x$;

    end

  end

end

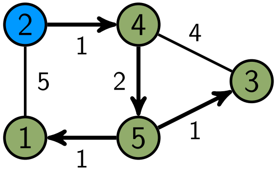


	Dist()				
x	1	2	3	4	5
–	∞	0	∞	∞	∞
2	5		∞	1	∞
4	5		5		3
5	4		4		
1			4		
3					

Kürzeste Wege Baum

Kürzeste Wege Baum
(für zusammenhängende Graphen):

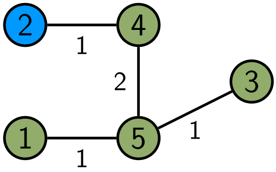
- $V_H = V$ und
- $E_H = \{\{v, \text{Vorgänger}(v)\} : v \in V \setminus \{s\}\}$.



Kürzeste Wege Baum

Kürzeste Wege Baum
(für zusammenhängende Graphen):

- $V_H = V$ und
- $E_H = \{\{v, \text{Vorgänger}(v)\} : v \in V \setminus \{s\}\}$.



Ein kürzester Weg vom Startknoten s zu einem beliebigen Knoten $v \in V$ in G ist der eindeutige s, v-Weg in H.

Algorithmus von Dijkstra

Input : Gewichteter Graph $G = (V, E, l)$ mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, Startknoten $s \in V$
Output : Funktionen $\text{Dist} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, $\text{Vorgänger} : V \setminus \{s\} \to V$

for $x \in V \setminus \{s\}$ **do**
    $\text{Dist}(x) \leftarrow \infty$;
end
$\text{Dist}(s) \leftarrow 0$;
$M \leftarrow V$;
while $M \neq \emptyset$ **do**
    $x \leftarrow$ Knoten in M mit minimalem Dist-Wert;
    $M \leftarrow M \setminus \{x\}$;
    for $y \in N(x) \cap M$ **do**
        if $\text{Dist}(x) + l(\{x, y\}) < \text{Dist}(y)$ **then**
            $\text{Dist}(y) \leftarrow \text{Dist}(x) + l(\{x, y\})$;
            $\text{Vorgänger}(y) \leftarrow x$;
        end
    end
end

Zwischenergebnisse

		Dist()				
x	M	1	2	3	4	5
–	$\{1,2,3,4,5\}$	∞	0	∞	∞	∞
2	$\{1,3,4,5\}$	5		∞	1	∞
4	$\{1,3,5\}$	5		5		3
5	$\{1,3\}$	4		4		
1	$\{3\}$			4		
3	$\emptyset$					