Propädeutikum Diskrete Mathematik

Algorithmus von Prim

Prof. Dr. R. Hemmecke
B.Sc. W.F. Riedl   Dipl-Math. M. Silbernagl

Technische Universität München

WS 2013/14

Gewichteter Graph (Wdh.)

$G = (V, E, l)$ ist ein gewichteter Graph, wenn $G = (V, E)$ ein Graph ist und $l : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion ist.
Für $H = (W, F) \subset G$ ist

$$l(H) = \sum_{e \in F} l(e).$$

Gewichteter Graph (Wdh.)

$G = (V, E, l)$ ist ein gewichteter Graph, wenn $G = (V, E)$ ein Graph ist und $l : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion ist.
Für $H = (W, F) \subset G$ ist

$$l(H) = \sum_{e \in F} l(e).$$

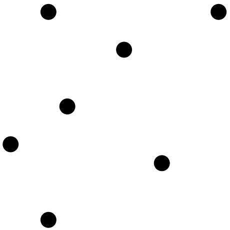
Minimaler Spannbaum

Sei $G = (V, E, l)$ ein gewichteter Graph mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Ein minimaler Spannbaum von G ist ein Baum $T = (V, F) \subset G$ mit

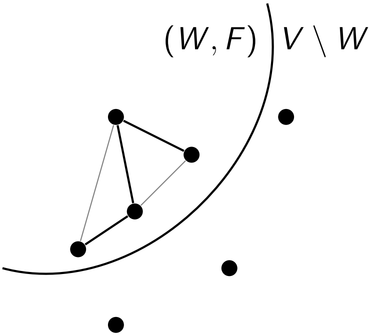
$$l(T) := \min\{l(T') \mid T' = (V, F') \text{ ist Baum }\}.$$

Algorithmus von Prim – Idee

Baue Spannbaum iterativ auf.



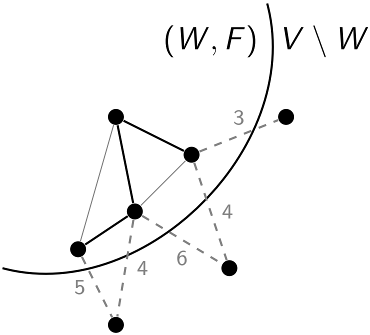
Algorithmus von Prim – Idee



Baue Spannbaum iterativ auf.

- (W, F): Aktueller Baum.

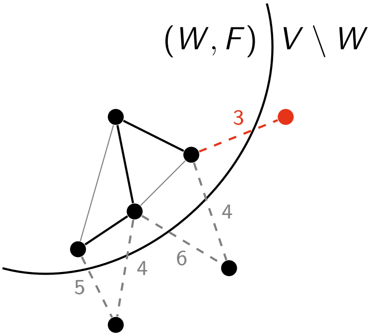
Algorithmus von Prim – Idee



Baue Spannbaum iterativ auf.

- (W, F): Aktueller Baum.

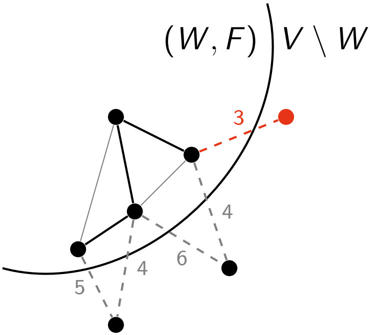
Algorithmus von Prim – Idee



Baue Spannbaum iterativ auf.

- (W, F): Aktueller Baum.
- Nehme angrenzende Kante mit geringstem Gewicht hinzu.

Algorithmus von Prim – Idee



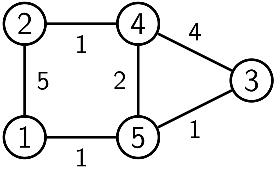
Baue Spannbaum iterativ auf.

- (W, F): Aktueller Baum.
- Nehme angrenzende Kante mit geringstem Gewicht hinzu.

Die so hinzugefügten Kanten erhalten die Baumstruktur. Durch Wiederholung der Schritte entsteht ein Spannbaum.

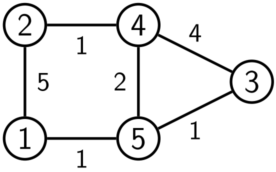
Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

Wähle einen beliebigen Knoten $s \in V$;
$W \leftarrow \{s\}$, $F \leftarrow \emptyset$, $\sigma(s) \leftarrow 0$;
for $v \in N(s)$ **do**
    Vorgänger$(v) \leftarrow s$, $\sigma(v) \leftarrow l(\{s, v\})$;
end
for $v \in V \setminus (N(s) \cup \{s\})$ **do**
    Vorgänger$(v) \leftarrow$ NIL, $\sigma(v) \leftarrow \infty$;
end
while $W \neq V$ **do**
    $y \leftarrow$ Knoten in $V \setminus W$ mit min. σ-Wert;
    $W \leftarrow W \cup \{y\}$,
    $F \leftarrow F \cup \{\{\text{Vorgänger}(y), y\}\}$;
    for $z \in N(y) \cap (V \setminus W)$ *mit* $\sigma(z) > l(\{y, z\})$ **do**
        $\sigma(z) \leftarrow l(\{y, z\})$, Vorgänger$(z) \leftarrow y$;
    end
end



Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

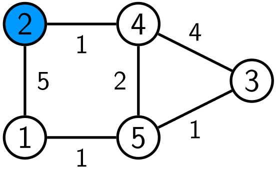
1 Wähle einen beliebigen Knoten $s \in V$;
2 $W \leftarrow \{s\}$, $F \leftarrow \emptyset$, $\sigma(s) \leftarrow 0$;
3 **for** $v \in N(s)$ **do**
4 | Vorgänger$(v) \leftarrow s$, $\sigma(v) \leftarrow l(\{s, v\})$;
end
5 **for** $v \in V \setminus (N(s) \cup \{s\})$ **do**
6 | Vorgänger$(v) \leftarrow$ NIL, $\sigma(v) \leftarrow \infty$;
end
7 **while** $W \neq V$ **do**
8 | $y \leftarrow$ Knoten in $V \setminus W$ mit min. σ-Wert;
9 | $W \leftarrow W \cup \{y\}$,
| $F \leftarrow F \cup \{\{\text{Vorgänger}(y), y\}\}$;
10 | **for** $z \in N(y) \cap (V \setminus W)$ *mit*
| $\sigma(z) > l(\{y, z\})$ **do**
11 | | $\sigma(z) \leftarrow l(\{y, z\})$, Vorgänger$(z) \leftarrow y$;
| **end**
end



	$\sigma()$				
y	1	2	3	4	5

Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

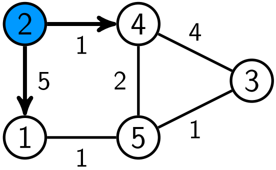
Wähle einen beliebigen Knoten $s \in V$;
$W \leftarrow \{s\}$, $F \leftarrow \emptyset$, $\sigma(s) \leftarrow 0$;
for $v \in N(s)$ **do**
    Vorgänger$(v) \leftarrow s$, $\sigma(v) \leftarrow l(\{s, v\})$;
end
for $v \in V \setminus (N(s) \cup \{s\})$ **do**
    Vorgänger$(v) \leftarrow$ NIL, $\sigma(v) \leftarrow \infty$;
end
while $W \neq V$ **do**
    $y \leftarrow$ Knoten in $V \setminus W$ mit min. σ-Wert;
    $W \leftarrow W \cup \{y\}$,
    $F \leftarrow F \cup \{\{\text{Vorgänger}(y), y\}\}$;
    for $z \in N(y) \cap (V \setminus W)$ *mit* $\sigma(z) > l(\{y, z\})$ **do**
        $\sigma(z) \leftarrow l(\{y, z\})$, Vorgänger$(z) \leftarrow y$;
    end
end



	$\sigma()$				
y	1	2	3	4	5

Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

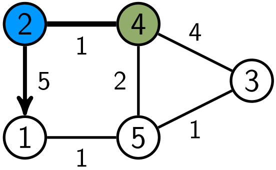
Wähle einen beliebigen Knoten $s \in V$;
$W \leftarrow \{s\}$, $F \leftarrow \emptyset$, $\sigma(s) \leftarrow 0$;
for $v \in N(s)$ **do**
  Vorgänger$(v) \leftarrow s$, $\sigma(v) \leftarrow l(\{s, v\})$;
end
for $v \in V \setminus (N(s) \cup \{s\})$ **do**
  Vorgänger$(v) \leftarrow$ NIL, $\sigma(v) \leftarrow \infty$;
end
while $W \neq V$ **do**
  $y \leftarrow$ Knoten in $V \setminus W$ mit min. σ-Wert;
  $W \leftarrow W \cup \{y\}$,
  $F \leftarrow F \cup \{\{\text{Vorgänger}(y), y\}\}$;
  for $z \in N(y) \cap (V \setminus W)$ *mit* $\sigma(z) > l(\{y, z\})$ **do**
    $\sigma(z) \leftarrow l(\{y, z\})$, Vorgänger$(z) \leftarrow y$;
  end
end



	$\sigma()$				
y	1	2	3	4	5
–	5	0	∞	1	∞

Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

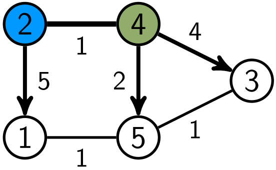
```
Wähle einen beliebigen Knoten s ∈ V;
W ← {s}, F ← ∅, σ(s) ← 0;
for v ∈ N(s) do
    Vorgänger(v) ← s, σ(v) ← l({s, v});
end
for v ∈ V \ (N(s) ∪ {s}) do
    Vorgänger(v) ← NIL, σ(v) ← ∞;
end
while W ≠ V do
    y ← Knoten in V \ W mit min. σ-Wert;
    W ← W ∪ {y},
    F ← F ∪ {{Vorgänger(y), y}};
    for z ∈ N(y) ∩ (V \ W) mit
    σ(z) > l({y, z}) do
        σ(z) ← l({y, z}), Vorgänger(z) ← y;
    end
end
```



	$\sigma()$				
y	1	2	3	4	5
–	5	0	∞	1	∞
4					

Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

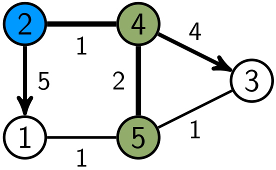
```
Wähle einen beliebigen Knoten s ∈ V;
W ← {s}, F ← ∅, σ(s) ← 0;
for v ∈ N(s) do
    Vorgänger(v) ← s, σ(v) ← l({s, v});
end
for v ∈ V \ (N(s) ∪ {s}) do
    Vorgänger(v) ← NIL, σ(v) ← ∞;
end
while W ≠ V do
    y ← Knoten in V \ W mit min. σ-Wert;
    W ← W ∪ {y},
    F ← F ∪ {{Vorgänger(y), y}};
    for z ∈ N(y) ∩ (V \ W) mit
    σ(z) > l({y, z}) do
        σ(z) ← l({y, z}), Vorgänger(z) ← y;
    end
end
```



	$\sigma()$				
y	1	2	3	4	5
–	5	0	∞	1	∞
4	5		4		2

Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

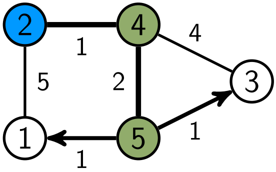
Wähle einen beliebigen Knoten $s \in V$;
$W \leftarrow \{s\}$, $F \leftarrow \emptyset$, $\sigma(s) \leftarrow 0$;
for $v \in N(s)$ **do**
  Vorgänger$(v) \leftarrow s$, $\sigma(v) \leftarrow l(\{s, v\})$;
end
for $v \in V \setminus (N(s) \cup \{s\})$ **do**
  Vorgänger$(v) \leftarrow$ NIL, $\sigma(v) \leftarrow \infty$;
end
while $W \neq V$ **do**
  $y \leftarrow$ Knoten in $V \setminus W$ mit min. σ-Wert;
  $W \leftarrow W \cup \{y\}$,
  $F \leftarrow F \cup \{\{\text{Vorgänger}(y), y\}\}$;
  for $z \in N(y) \cap (V \setminus W)$ *mit*
  $\sigma(z) > l(\{y, z\})$ **do**
    $\sigma(z) \leftarrow l(\{y, z\})$, Vorgänger$(z) \leftarrow y$;
  end
end



	$\sigma()$				
y	1	2	3	4	5
–	5	0	∞	1	∞
4	5		4		2
5					

Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

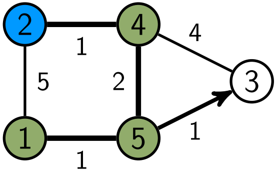
Wähle einen beliebigen Knoten $s \in V$;
$W \leftarrow \{s\}$, $F \leftarrow \emptyset$, $\sigma(s) \leftarrow 0$;
for $v \in N(s)$ **do**
    Vorgänger$(v) \leftarrow s$, $\sigma(v) \leftarrow l(\{s, v\})$;
end
for $v \in V \setminus (N(s) \cup \{s\})$ **do**
    Vorgänger$(v) \leftarrow$ NIL, $\sigma(v) \leftarrow \infty$;
end
while $W \neq V$ **do**
    $y \leftarrow$ Knoten in $V \setminus W$ mit min. σ-Wert;
    $W \leftarrow W \cup \{y\}$,
    $F \leftarrow F \cup \{\{\text{Vorgänger}(y), y\}\}$;
    for $z \in N(y) \cap (V \setminus W)$ *mit* $\sigma(z) > l(\{y, z\})$ **do**
        $\sigma(z) \leftarrow l(\{y, z\})$, Vorgänger$(z) \leftarrow y$;
    end
end



	$\sigma()$				
y	1	2	3	4	5
–	5	0	∞	1	∞
4	5		4		2
5	1		1		

Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

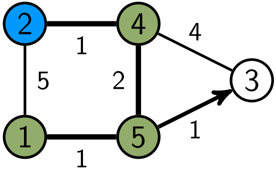
```
Wähle einen beliebigen Knoten s ∈ V;
W ← {s}, F ← ∅, σ(s) ← 0;
for v ∈ N(s) do
    Vorgänger(v) ← s, σ(v) ← l({s, v});
end
for v ∈ V \ (N(s) ∪ {s}) do
    Vorgänger(v) ← NIL, σ(v) ← ∞;
end
while W ≠ V do
    y ← Knoten in V \ W mit min. σ-Wert;
    W ← W ∪ {y},
    F ← F ∪ {{Vorgänger(y), y}};
    for z ∈ N(y) ∩ (V \ W) mit
    σ(z) > l({y, z}) do
        σ(z) ← l({y, z}), Vorgänger(z) ← y;
    end
end
```



	$\sigma()$				
y	1	2	3	4	5
–	5	0	∞	1	∞
4	5		4		2
5	1		1		
1					

Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

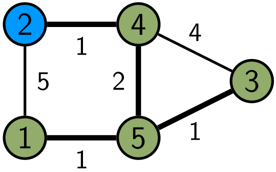
Wähle einen beliebigen Knoten $s \in V$;
$W \leftarrow \{s\}$, $F \leftarrow \emptyset$, $\sigma(s) \leftarrow 0$;
for $v \in N(s)$ **do**
  Vorgänger$(v) \leftarrow s$, $\sigma(v) \leftarrow l(\{s, v\})$;
end
for $v \in V \setminus (N(s) \cup \{s\})$ **do**
  Vorgänger$(v) \leftarrow$ NIL, $\sigma(v) \leftarrow \infty$;
end
while $W \neq V$ **do**
  $y \leftarrow$ Knoten in $V \setminus W$ mit min. σ-Wert;
  $W \leftarrow W \cup \{y\}$,
  $F \leftarrow F \cup \{\{\text{Vorgänger}(y), y\}\}$;
  for $z \in N(y) \cap (V \setminus W)$ *mit* $\sigma(z) > l(\{y, z\})$ **do**
    $\sigma(z) \leftarrow l(\{y, z\})$, Vorgänger$(z) \leftarrow y$;
  end
end



	$\sigma()$				
y	1	2	3	4	5
–	5	0	∞	1	∞
4	5		4		2
5	1		1		
1			1		

Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

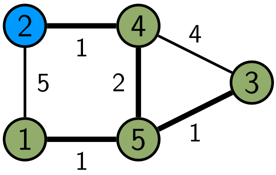
Wähle einen beliebigen Knoten $s \in V$;
$W \leftarrow \{s\}$, $F \leftarrow \emptyset$, $\sigma(s) \leftarrow 0$;
for $v \in N(s)$ **do**
  Vorgänger$(v) \leftarrow s$, $\sigma(v) \leftarrow l(\{s, v\})$;
end
for $v \in V \setminus (N(s) \cup \{s\})$ **do**
  Vorgänger$(v) \leftarrow$ NIL, $\sigma(v) \leftarrow \infty$;
end
while $W \neq V$ **do**
  $y \leftarrow$ Knoten in $V \setminus W$ mit min. σ-Wert;
  $W \leftarrow W \cup \{y\}$,
  $F \leftarrow F \cup \{\{\text{Vorgänger}(y), y\}\}$;
  for $z \in N(y) \cap (V \setminus W)$ *mit* $\sigma(z) > l(\{y, z\})$ **do**
    $\sigma(z) \leftarrow l(\{y, z\})$, Vorgänger$(z) \leftarrow y$;
  end
end



	$\sigma()$				
y	1	2	3	4	5
–	5	0	∞	1	∞
4	5		4		2
5	1		1		
1			1		
3					

Input : $G = (V, E, l)$ zshgd. mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

Wähle einen beliebigen Knoten $s \in V$;
$W \leftarrow \{s\}$, $F \leftarrow \emptyset$, $\sigma(s) \leftarrow 0$;
for $v \in N(s)$ **do**
    Vorgänger$(v) \leftarrow s$, $\sigma(v) \leftarrow l(\{s, v\})$;
end
for $v \in V \setminus (N(s) \cup \{s\})$ **do**
    Vorgänger$(v) \leftarrow$ NIL, $\sigma(v) \leftarrow \infty$;
end
while $W \neq V$ **do**
    $y \leftarrow$ Knoten in $V \setminus W$ mit min. σ-Wert;
    $W \leftarrow W \cup \{y\}$,
    $F \leftarrow F \cup \{\{\text{Vorgänger}(y), y\}\}$;
    for $z \in N(y) \cap (V \setminus W)$ *mit* $\sigma(z) > l(\{y, z\})$ **do**
        $\sigma(z) \leftarrow l(\{y, z\})$, Vorgänger$(z) \leftarrow y$;
    end
end



	$\sigma()$				
y	1	2	3	4	5
–	5	0	∞	1	∞
4	5		4		2
5	1		1		
1			1		
3					

Algorithmus von Prim

Input : Gewichteter zusammenhängender Graph $G = (V, E, l)$ mit $l : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output : Minimaler Spannbaum $T = (V, F)$

Wähle einen beliebigen Knoten $s \in V$;
$W \leftarrow \{s\}$, $F \leftarrow \emptyset$, $\sigma(s) \leftarrow 0$;
for $v \in N(s)$ **do**
    Vorgänger$(v) \leftarrow s$, $\sigma(v) \leftarrow l(\{s, v\})$;
end
for $v \in V \setminus (N(s) \cup \{s\})$ **do**
    Vorgänger$(v) \leftarrow$ NIL, $\sigma(v) \leftarrow \infty$;
end
while $W \neq V$ **do**
    $y \leftarrow$ Knoten in $V \setminus W$ mit minimalem σ-Wert;
    $W \leftarrow W \cup \{y\}$, $F \leftarrow F \cup \{\{\text{Vorgänger}(y), y\}\}$;
    for $z \in N(y) \cap (V \setminus W)$ *mit* $\sigma(z) > l(\{y, z\})$ **do**
        $\sigma(z) \leftarrow l(\{y, z\})$, Vorgänger$(z) \leftarrow y$;
    end
end

Zwischenergebnisse

		$\sigma()$				
y	Neu in F	1	2	3	4	5
–		5	0	∞	1	∞
4	$\{2,4\}$	5		4		2
5	$\{4,5\}$	1		1		
1	$\{1,5\}$			1		
3	$\{3,5\}$					