10 Erzeugende Funktionen

Ziel: Folge $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

geg. durch durch $a_0 := 2$

$a_n := 3 \cdot a_{n-1} + 1$

ges: $a_n =$ explizite Formel

nicht: raten + Bew. mit Induktion

sondern: herleiten

Werkzeug: Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

wenn konvergent, dann $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

wir vernachlässigen erstmal Konvergenzbetrachtungen

Bsp 10.1: $a_0 := 2$, $a_n := 3a_{n-1} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(1) Potenzreihe aufstellen

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(2) Rekursion & Startwerte einsetzen

$$A(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (3a_{n-1} + 1) x^n$$

③ auftretende a_n durch $A(x)$

$$A(x) = 2 + 3\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$= 1 + 3x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)$$

$$= 1 + 3x\cdot\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= 1 + 3x\cdot A(x) + \frac{1}{1-x}$$

④ Nach $A(x)$ auflösen

$$A(x) - 3x \cdot A(x) = 1 + \frac{1}{1-x}$$

$$(1-3x) \cdot A(x) = 1 + \frac{1}{1-x}$$

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{1}{(1-3x)(1-x)}$$

<u>Ziel:</u> $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

⑤ Gebrochen rationale Fkt. durch Potenzreihen ersetzen: a) $\frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$$

$$b)\ \frac{1}{(1-3x)(1-x)} = \text{Partialbruchzerlegung}$$

$$= \frac{3/2}{1-3x} + \frac{-1/2}{1-x} \rightarrow \text{Hua 1}$$

a)

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{-1/2}{1-x} + \frac{3/2}{1-3x}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \right) x^n$$

⑥ Koeffizientenvergleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(5 \cdot 3^n - 1) x^n$$

$$\xRightarrow{\text{Identitätssatz}} \quad a_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^n - 1)$$

Test: $n=0$

$$a_0 = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^0 - 1) = 2 \checkmark$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^1 - 1) = 7 \ldots \checkmark$$

$$\vdots$$

(sieht gut aus.)

Aufgabe: Fibonacci-Zahlen

$F_0 := 0, \; F_1 := 1, \; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \; \forall n \in \mathbb{N}_0$

$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$\vdots$

5

8

13

21

34

55

$\vdots$

?

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n$$

$$= F_0 + F_1 \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} F_n\, x^n$$

$$= 0 + 1 \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}\, x^n$$

$$= x + x \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}\, x^{n-1}} + x^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}\, x^{n-2}}$$

$$= F_1 x^1 + F_2 x^2 + \dots \qquad\qquad = F_0 \cdot x^0 + F_1 x^1 + \dots$$

$$= A(x) - \underbrace{F_0}_{=0} \cdot x^0 \qquad\qquad = A(x)$$

$$= A(x)$$

$$A(x) = x + x \cdot A(x) + x^2 A(x)$$

$$(1-x-x^2)A(x) = x$$

$$A(x) = \frac{x}{(1-x-x^2)} \underset{=}{\text{Ziel}} \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

$$= \frac{x}{(1-px)(1-qx)}$$ Finde p, q !

$$\Rightarrow (1-x-x^2) = (1-px)(1-qx) \quad \Big| : x^2$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 = \left(\frac{1}{x} - p\right)\left(\frac{1}{x} - q\right) \qquad \frac{1}{x} \to y$$

$$y^2 - y - 1 = (y-p)(y-q)$$

$\Rightarrow$ p, q sind NST von $y^2 - y - 1$

$$p = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \qquad \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{\alpha}{1-px} + \frac{\beta}{1-qx}$$

$$q = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \Rightarrow 1 = \alpha(1-qx) + \beta(1-px)$$

$$x = \frac{1}{p} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\left(1-\frac{q}{p}\right)} = \frac{p}{p-q}$$

$$= \frac{p}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{1}{q} \Rightarrow \beta = \frac{1}{\left(1-\frac{p}{q}\right)} = \frac{q}{q-p}$$

$$= -\frac{q}{\sqrt{5}}$$

$$A(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{p}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x}{1-px} - \frac{q}{5} \cdot \frac{x}{1-qx}$$

$$A(x) = \frac{p}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^{n+1} - \frac{q}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} p^{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} p^n x^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} q^n x^n$$

Letztendlich $\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$

Potenzreihen - Baukasten (Beweise -> Analysis)

Satz 10.2 Seien $A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ und

$B(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ zwei

Potenzreihen, die in $x \in \mathbb{R}$ konvergent sind.

a) Wenn $C(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

dann ist $C(X)$ auch in x konvergent und

$$C(X) = A(X) \cdot B(X)$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)\cdot(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)$$

$$= \underbrace{a_0 b_0}_{= c_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{= c_1} x + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{= c_2} x^2 + \dots$$

b) $A(x)$ ist im Inneren des Konvergenzbereichs diffbar

$A'(x)$ hat den gleichen Konvergenzradius und

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} \cdot x^n$$

c) $q \in \mathbb{R}$ beliebig, $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \left|\frac{1}{q}\right|$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n = \frac{1}{1-qx}$$, insbesondere $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

für $|x| < 1$.

d) k-faches Ableiten von $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ergibt dank b)

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)\, x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

$\forall k \in \mathbb{N}_0$

$\forall x$ mit $|x|<1$

Satz 10.3 Sei $I := \{x \in \mathbb{R} : c < x < d\} \neq \emptyset$ ein Intervall und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zwei Folgen,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ und}$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$ zwei Potenzreihen, die beide $\forall x \in I$ konvergent sind und $A(x) = B(x)$ erfüllen.

Dann $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad a_n = b_n$