8 Elementares Zählen

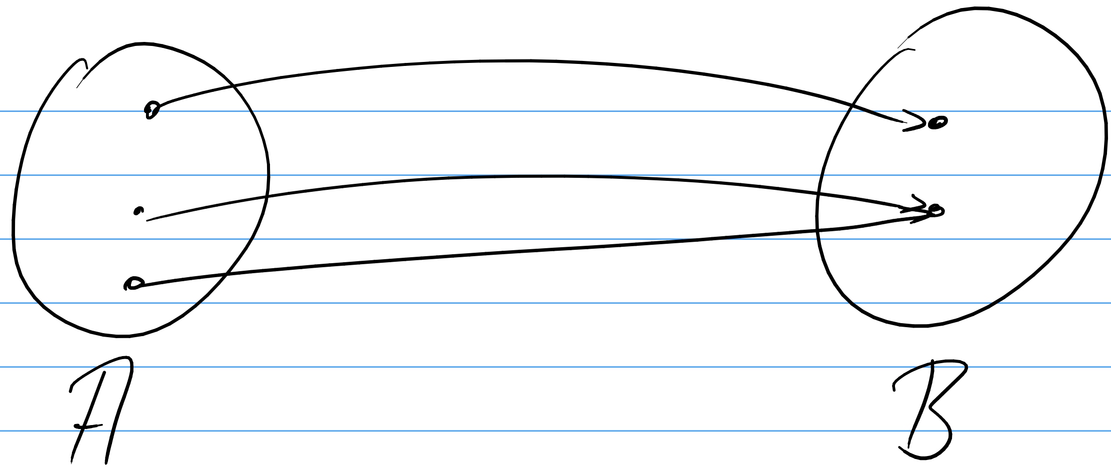
Wdh: $M = M_1 \dot\cup M_2 \dot\cup \ldots \dot\cup M_k$

$$|M| = \sum_{i=1}^{k} |M_i|$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

$$M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$$

$$|M| = \prod_{i=1}^{k} |M_i|$$



f Abbildung $A \to B$

Für $b \in B$: $\quad f^{-1}(b) = \{ a \in A : f(a) = b \}$

$$A = \dot{\bigcup_{b \in B}} f^{-1}(b)$$

$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)|$$

injektiv, wenn $\forall b \in B \quad |f^{-1}(b)| \leq 1$

surjektiv, wenn $\forall b \in B \quad |f^{-1}(b)| \geq 1$

bijektiv, wenn $\forall b \in B \quad |f^{-1}(b)| = 1$

Fakt: $f: A \to B$ Bijektion endlicher Mengen

$\Rightarrow |A| = |B|$

wichtig!

$\Rightarrow$ Gegenbsp. für unendliche Mengen

$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$

$0 \mapsto 0$

$1 \mapsto 1$

$2 \mapsto -1$

$3 \to 2$

$4 \to -2$

$\vdots$

Fakt: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

Idee des Zählens:

Weise $A \subseteq M$ einen 0/1-Vektor zu:

$M = \{m_1, \dots, m_n\}$ mit $n = |M|$

z.B. $A = \{m_2, m_4\}$

$\Rightarrow \chi(A) = (0,1,0,1,0,\dots,0)$

bijektive Abb.

Prop. 8.7 Doppeltes Abzählen

Bsp: Graph $G=(V,E)$

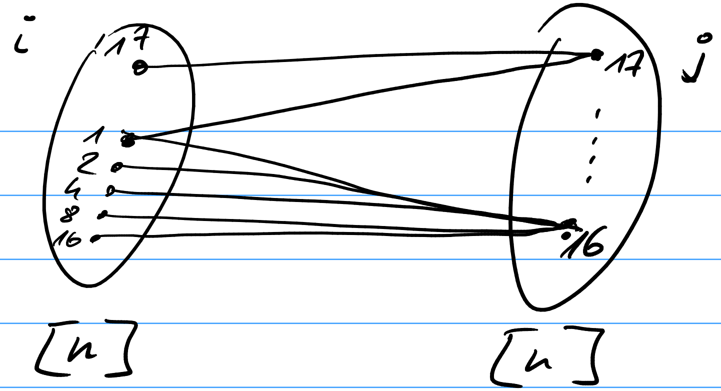
Es gilt $\sum_{v\in V} \deg(v) = 2\cdot|E|$.

Allgemein: $R \subset A\times B$ binäre Relation. Dann

$$\sum_{a\in A} \left|\{b\in B : (a,b)\in R\}\right| = |R| = \sum_{b\in B} \left|\{a\in A : (a,b)\in R\}\right|$$

Bew: $$\dot{\bigcup_{a\in A}} \{(a,b)\in R : b\in B\} = R = \dot{\bigcup_{b\in B}} \{(a,b)\in R : a\in A\}$$ //

Bsp 8.8:



Def: $(i,j) \in R$

$:\Longleftrightarrow i \mid j$

Ziel: Man finde die durchschnittliche Anzahl an Teilern

$$:= \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} \underbrace{\left| \{ i \in [n] : (i,j) \} \right|}_{\text{Anzahl der Teiler von } j} = \,?$$

$$\left| \{ i : (i,16) \in R \} \right| = 5$$

$$\left| \{ i : (i,17) \in R \} \right| = 2$$

Idee: $|\{j : (i,j) \in R\}|$ = Anzahl der Vielfachen von i, die in $[n]$ liegen

$= \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$

wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$

$\lfloor 3{,}7 \rfloor = 3$

$\lfloor 3 \rfloor = 3$

$\lfloor -3{,}7 \rfloor = -4$

$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}$

$\lceil 3{,}7 \rceil = 4$

$\lceil -3{,}7 \rceil = -3$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |\{i : (i,j) \in R\}| \overset{8.7}{=} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |\{j : (i,j) \in R\}|$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

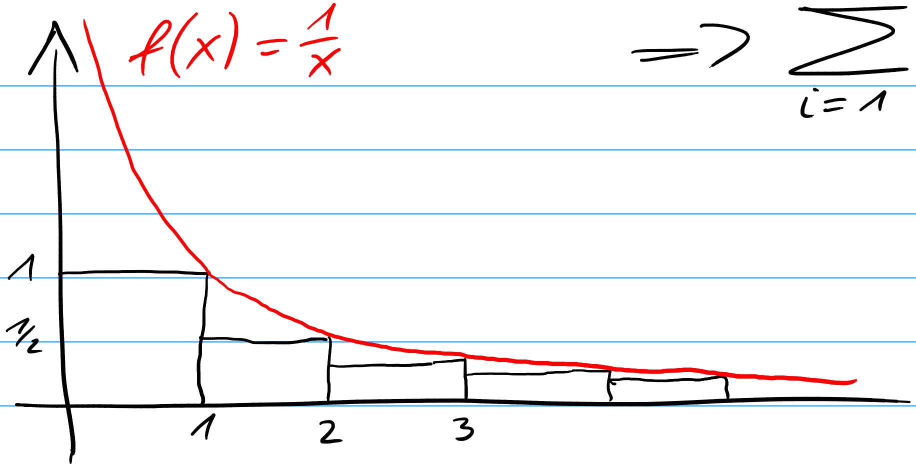
Differenz < 1

$$\approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

$$= \underbrace{1}_{\geq 1/2} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq 1/2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 1/2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 1/2} + \underbrace{\ldots}_{\geq 1/2}$$

Können wir $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ abschätzen?

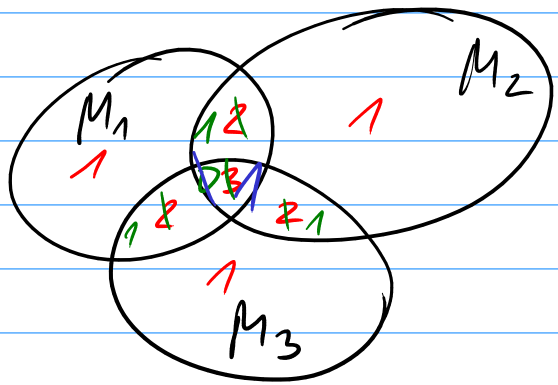


$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$
$$= 1 + \ln x \Big|_1^n$$
$$= 1 + \ln n - \ln 1$$
$$= 1 + \ln n$$

$\Rightarrow$ Durchschnittliche Anzahl an Tälern wächst ungefähr wie $1 + \ln(n)$.

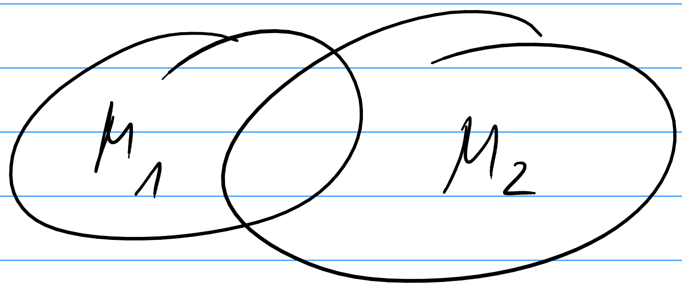
Satz 8.9 Prinzip von Inklusion-Exklusion

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{r=1}^{n}\left((-1)^{r-1}\sum_{I\in\binom{[n]}{r}}\left|\bigcap_{j\in I} M_j\right|\right)$$



$$\begin{aligned}|M_1\cup M_2\cup M_3| &= |M_1|+|M_2|+|M_3|\\ &\quad -|M_1\cap M_2|-|M_1\cap M_3|-|M_2\cap M_3|\\ &\quad +|M_1\cap M_2\cap M_3|\end{aligned}$$

Bsp: $|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|$



9. Teilmengen zählen

Satz 9.1 Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und eine Menge M mit $|M| = n$.

Ziel: Ziehe k Kugeln aus Urne mit n Kugeln.
$\rightarrow$ Wieviele Möglichkeiten?

a) geordnet, mit Zurücklegen
Für $M^k = \{(c_1, \dots, c_k) : c_i \in M \ \forall i \in [k]\}$
gilt $|M^k| = |M|^k = n^k$

b) geordnet, ohne Zurücklegen

Für $M^{\underline{k}} := \{ (c_1, \ldots, c_k) : c_i \in M \ \forall i \in [k], \ c_i \neq c_j \ \forall i \neq j \}$

gilt $|M^{\underline{k}}| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$

$$= \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$$

$$=: n^{\underline{k}}$$

<u>Bem:</u> $x \longmapsto x^{\underline{k}}$ heißt <u>fallende k-te Faktorielle</u> von x.

$$n! := n^{\underline{n}} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(n-1)) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Bem: $n^0 := 1$

Insbesondere $0! = 1$

Bem: x^k ist auch für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert

z.B: $5{,}1^2 = 5{,}1 \cdot 4{,}1$

c) ungeordnet, ohne Zurücklegen   Sei $k \leq n$.

Für $\binom{M}{k} := \{ \{c_1, \dots, c_k\} : c_i \in M \ \forall i \in [k], \ c_i \neq c_j \ \forall i \neq j \}$

gilt $\left| \binom{M}{k} \right| = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} =: \boxed{\binom{n}{k}}$

$$= \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \boxed{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

Bsp: 6 aus 49 $\quad n = 49, \; k = 6$

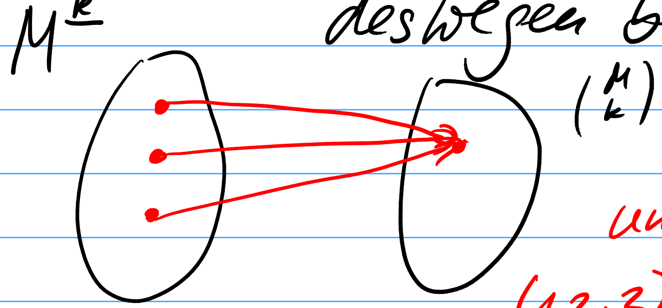
$\binom{49}{6}$ Möglichkeiten

$$= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \approx 13{,}9\ldots \text{ Mio}$$

Bew von a), b) klar.

Bew von c) intuitiv: wie b), aber jede k-Teilmenge hat $k!$ Anordnungen und wird deswegen bei b) $k!$ oft gezählt

formal



$\{1,2,3\}$ wird in $\binom{M}{3}$ 1x gezählt und in M^3 6x gezählt, nämlich als $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3)\, (2,3,1), (3,1,2)\, (3,2,1)$