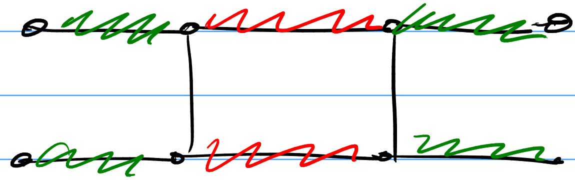
Wdh.: Matchings in $G=(V,E)$

$M \subset E$ mit $e \cap e' = \emptyset \; \forall e, e' \in M$

max. Matching = maximal bzgl. Inklusion

größtes Matching = größte Anzahl an Kanten



größtes Matching

maximales Matching

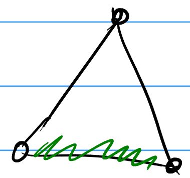
größtes $\Rightarrow$ maximal
maximal $\not\Rightarrow$ größtes

perfektes Matching $\quad 2|M| = |V|$, d.h. alle Knoten werden überdeckt

$\nu(G)$ = Matchingzahl

$= \max\{|M| : M \text{ Matching in } G\}$

perfektes Matching $\longrightarrow$ größtes Matching $\longrightarrow$ maximales Matching



$\nexists$ perfektes Matching

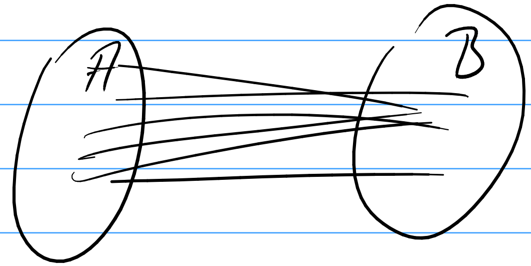
Prop 3.2 Wenn M^* größtes Matching in G ist und M ein maximales Matching in G, dann

$$|M^*| \overset{(a)}{\geq} |M| \overset{(b)}{\geq} \frac{1}{2} |M^*|$$

Bew: (a) Klar. (b) HA

Satz 3.3 „Heiratssatz von Hall"

Sei $G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit



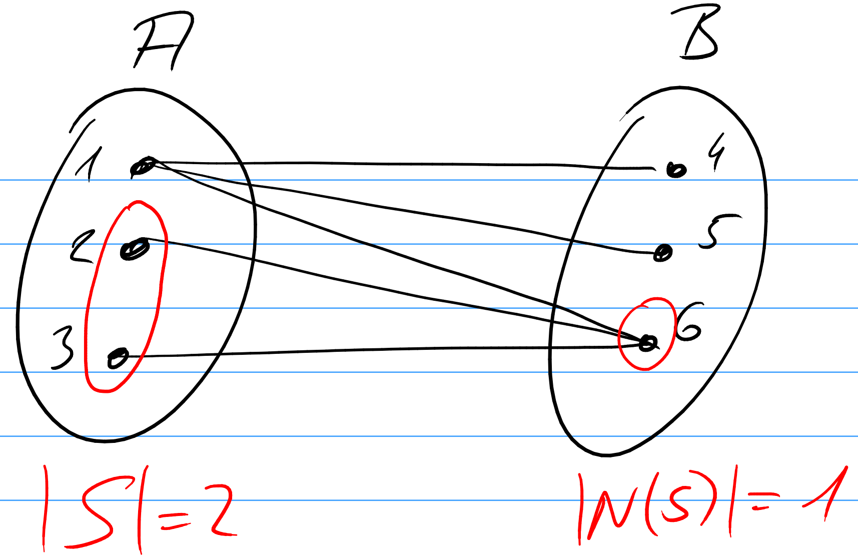
G besitzt ein Matching, das alle Knoten von A überdeckt

$$\iff \boxed{\forall S \subset A : \quad |S| \leq |N(S)|}$$

(*) Hall-Bedingung

wobei $N(S) = \bigcup_{x \in S} N(x)$

Bsp:



$\Rightarrow \nexists$ Matching, das A überdeckt

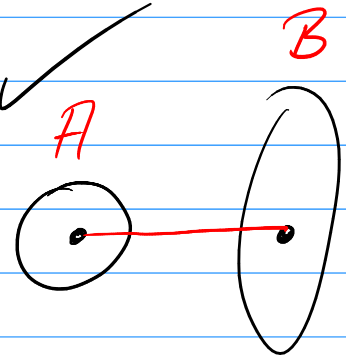
Bew: "$\Longrightarrow$" Sei M ein Matching in G, das alle Knoten in A überdeckt. Sei $S \subset A$ beliebig. Seien $T \subset B$ die Matchingpartner von den Knoten in S.

$$|S| = |T| \leq |N(S)|$$, da $T \subset N(S)$.

"$\Leftarrow$" Induktion über $|A|$

Ind.-Anf.: $|A| = 0$ ✓

$|A| = 1$



Hall-Bedingung für $S = A$
$\Rightarrow 1 = |S| \leq |N(S)|$
$\Rightarrow \exists$ Kante von A nach B
$\Rightarrow$ Matching, das A überdeckt

Ind.-Vor.: Für alle Graphen $G = (A \dot\cup B, E)$ mit $|A| \leq k$ gilt:

Wenn $(*)$ erfüllt ist, hat G ein Matching, das alle Knoten aus A überdeckt

Ind.-Schritt:

Zu zeigen: Für alle Graphen $G=(A \dot\cup B, E)$ mit $|A| = k+1$ gilt:

Wenn (*) erfüllt ist, so hat G ein Matching, das A überdeckt.

Sei also $G=(A \dot\cup B, E)$ ein Graph mit $|A| = k+1$, der (*) erfüllt.

Fall a) $\forall\, T \subset A$ mit $0 < |T| < |A|$: $|T| + 1 \leq |N_G(T)|$ (**)

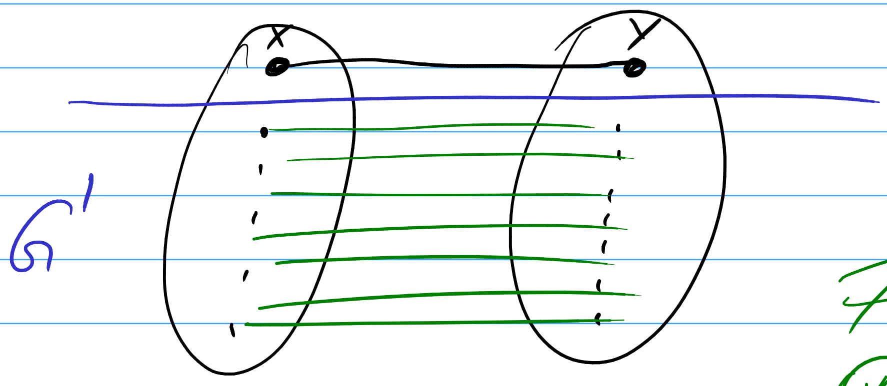
$\left(|T| < |N_G(T)| \right)$

Wähle zwei Knoten $x \in A$, $y \in B$ mit $\{x,y\} \in E$

und betrachte $G' := G - x - y$

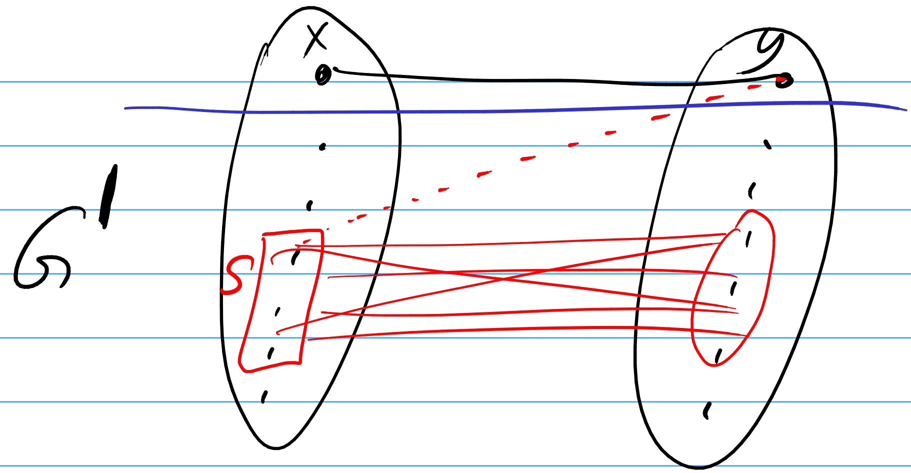
$= G\left[(A \setminus \{x\}) \,\dot\cup\, (B \setminus \{y\}) \right]$

$|A \setminus \{x\}| = k$



Falls wir für G' die Hall-Bed. (*) nachweisen, so existiert in G' ein Matching, das $A \setminus \{x\}$ überdeckt

$\longrightarrow$ Matching in G.



$\forall S \subset A \setminus \{x\}$

$\underline{|N_{G'}(S)|} \geq |N_G(S)| - 1$

$\overset{(**)}{\geq} (|S|+1) - 1$

$= \underline{|S|}$ Hall-Bed.

$\Rightarrow$ G' erfüllt Hall-Bed. und $|A \setminus \{x\}| = k$

$\overset{\text{Ind-Vor.}}{\Longrightarrow}$ G' besitzt Matching, das $A \setminus \{x\}$ überdeckt

$\Rightarrow$ G besitzt Matching, das A überdeckt
(nimm $\{x,y\}$ hinzu)

Fall b) "nicht a)"

$\Rightarrow \exists\, T \subset A$ mit $0 < |T| < |A|$: $|T|+1 > |N(T)|$

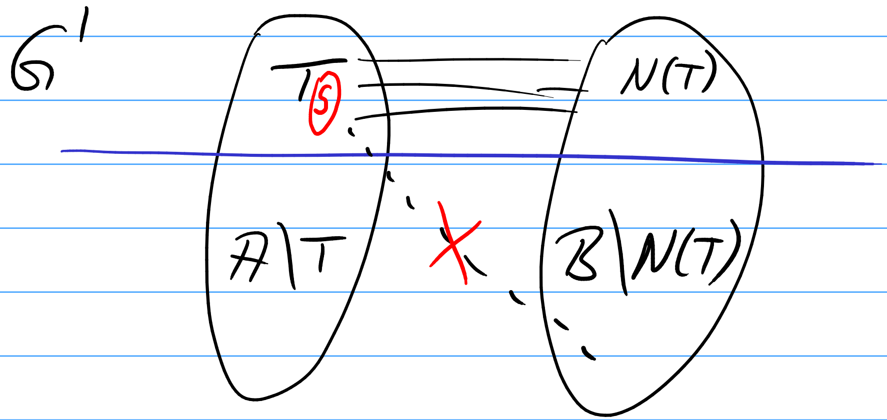
$\Rightarrow \qquad |T| \geq |N(T)|$

$\Rightarrow \qquad |T| = |N(T)|$,

da auch $|T| \leq |N(T)|$ gilt

Hall-Bed für $S=T$.

Also $\exists\, T \subset A$ mit $0 < |T| < |A|$: $|T| = |N(T)|$

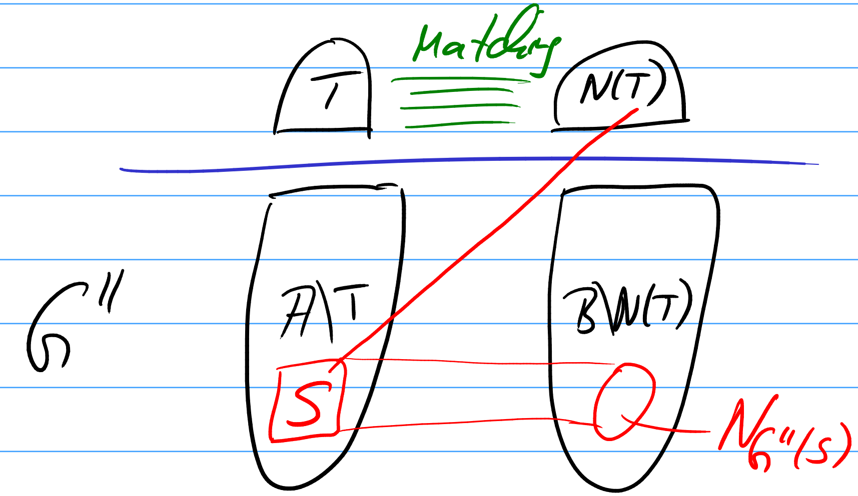


Betrachte $G' = G[T \dot\cup N(T)]$

G' erfüllt wegen $N_{G'}(S) = N_G(S)$ immer noch (*)

Weil $|T| < |A| = k+1$, gibt es nach Ind-Vor. in G' ein Matching, das $|T|$ überdeckt.

Betrachte nun den unteren Teil:



Betrachte $G'' = G\left[(A\setminus T) \,\dot\cup\, (B\setminus N(T))\right]$

Beh: auch G'' erfüllt $(*)$

Gegenannahme: $\exists\, S \subset A\setminus T$ mit $|S| > |N_{G''}(S)|$

$$\Rightarrow |S\cup T| = |S| + \underset{|N_G(T)|}{\underset{\shortparallel}{|T|}} > |N_{G''}(S)| + |N_G(T)| = |N_G(S\cup T)|$$

$\lightning$ zur Tatsache, dass G (*) erfüllt.

$\Rightarrow$ S kann nicht existieren

$\Rightarrow$ G'' erfüllt (*)

und $|A \setminus T| < |A| = k+1$

$\overset{\text{Ind-Vor}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Matching in G'', das $A \setminus T$ überdeckt

$\Rightarrow$ Matching in G' $\cup$ Matching in G''

$=$

Matching in G, das A überdeckt. //

<u>Folgerung 3.4</u> Sei $G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit.
Dann hat G ein perfektes Matching

$\iff \forall S \subset A: |S| \leq |N(S)|$ und $|A| = |B|$

Bew: HA