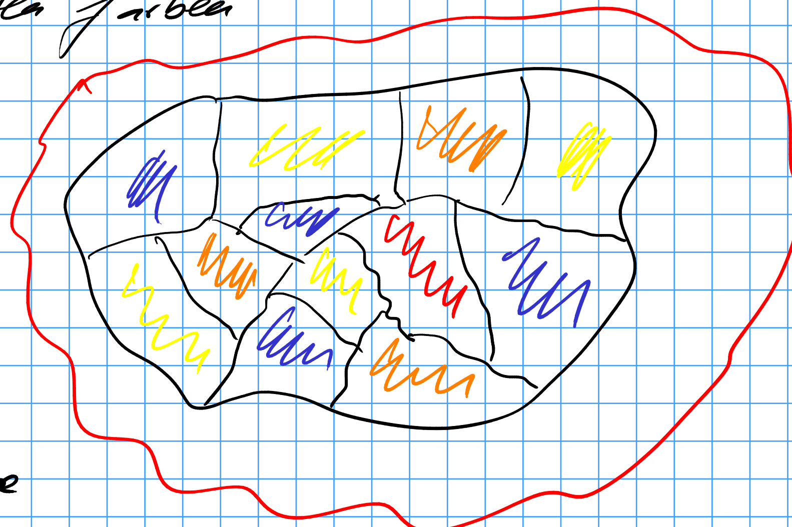
Propädeutikum Diskrete Mathematik

Raymond Hemmecke
hemmecke@tum.de

für BSC (MA1501)
Lehramt Gymnasium (MA1503)

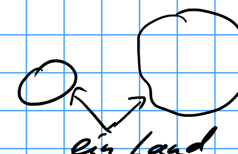
1. Ideen, Bsp., Motivation

a) Landkarten färben

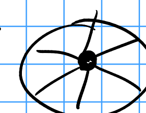


- benachbarte Länder sollen verschiedene Farben haben
- möglichst wenige Farben verwenden

nicht erlaubt:

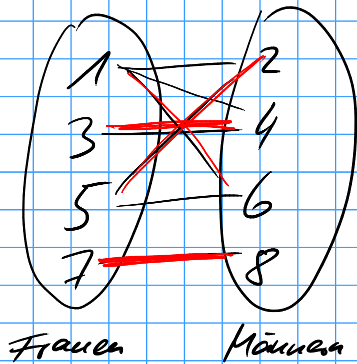


nicht erlaubt:



4-Farbensatz: 4 Farben reichen.

b) Heiratsproblem



Kante i — j, falls Frau i den Mann j kennt

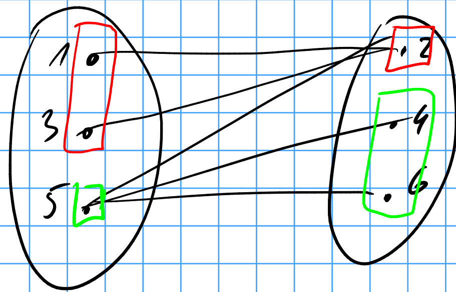
gesucht: maximale Zahl nichtüberschneidender Paare

- maximales Matching
- perfektes Matching

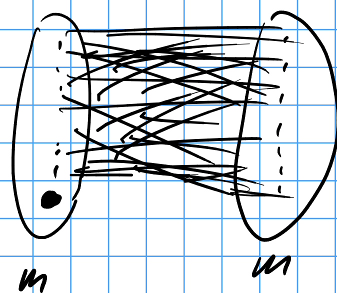
Heiratssatz: Es gibt ein perfektes Matching

$\Updownarrow$

jede Teilmenge von n Frauen insgesamt mindestens n Männer kennen



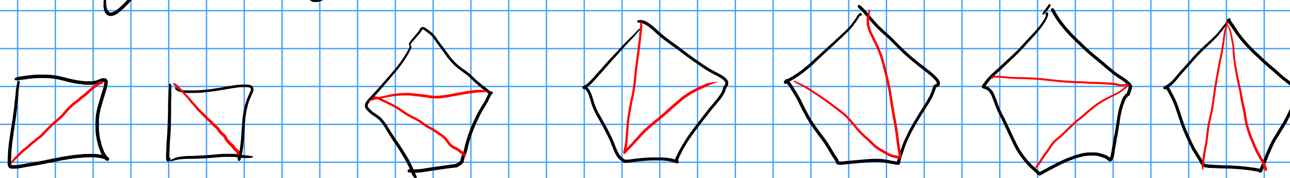
Wieviele Bekanntschaften könnte es geben, derart, dass ein perfektes Matching möglich ist?



$$(m-1)\cdot m = m^2 - m$$

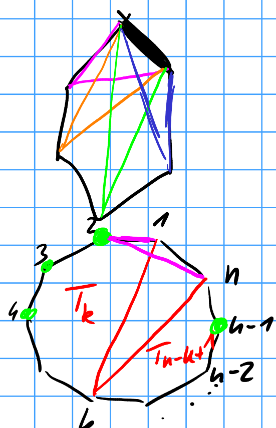
Vermutung: $m^2 - m$ ist auch die maximale Anzahl

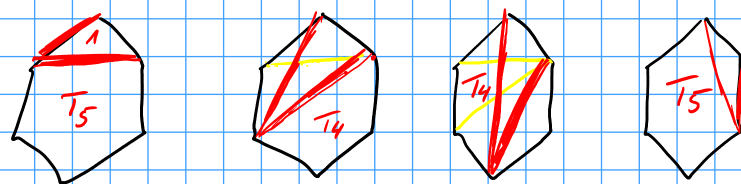
c) Triangulierungen



T_n = Anzahl der Triangulierungen eines n-Ecks

$T_3 = 1$, $T_4 = 2$, $T_5 = 5$, $T_6 = ?$ Catalan-Zahlen





$T_3 \cdot T_5 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14 = T_6$

$T_2 := 1$

$$\sum_{k=2}^{n-1} T_k \cdot T_{n-k+1} = T_n = T_2 \cdot T_{n-1} + T_3 \cdot T_{n-2} + \dots$$

$$T_n = \frac{(2n-4)\cdot(2n-5)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-1)^1 (n-2)^2 (n-3)^2 \cdot \ldots \cdot 2^2 \cdot 1^2}$$

$$T_4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2^2 \cdot 1^2} = 2$$

2. Graphen

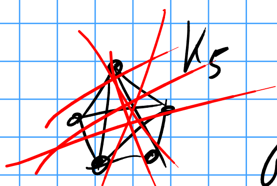
Def 2.1 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

$n \in \mathbb{N} \quad [n] := \{1, 2, \dots, n\}$

Ein Graph besteht aus einer Knotenmenge V vertex

und einer Kantenmenge E edge $\quad E \subset \underbrace{\{\underbrace{e \subset V}_{e \text{ ist Teilmenge von } V} : \underbrace{|e| = 2}_{\text{Teilmenge besitzt genau 2 Elemente}}\}}_{\text{Menge aller 2-elementigen Teilmengen von } V}$

Teilmenge von Kanten



K_5

Generalvoraussetzung $\quad V \neq \emptyset$, V ist endlich

$x, y \in V$ heißen benachbart (adjazent), wenn $\{x, y\} \in E$.

$N(x) := \{y \in V : \{x, y\} \in E\}$ Nachbarschaft von x

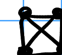
$\deg(x) = |N(x)|$ **Grad** von x

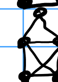
Falls $\deg(x) = 0$ $\quad x$ **isolierter Knoten**

$\deg(x) = 1$ $\quad x$ Blatt

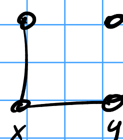
Wenn $\deg(x) = k$ für alle $x \in V$ dann heißt Graph k-regulär


2-regulär


3-regulär


nicht regulär

Bsp:

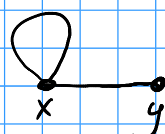


isoliert

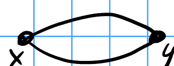
benachbart

$\deg(x) = 2$, $\deg(y) = 1$

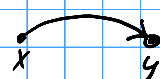
Beachte:



Schleifen sind nicht erlaubt $\quad \{x,y\}, \{x,x\} = \{x\}$ schlecht



Mehrfachkanten nicht erlaubt $\quad E = \{\{x,y\}, \{x,y\}\} = \{\{x,y\}\}$

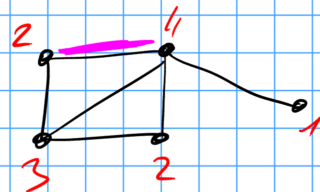


gerichtete Kanten nicht erlaubt $\quad \{x,y\} = \{y,x\}$

Prop 2.4 Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

Bsp:



$1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 12 = 2 \cdot 6$ ✓

Beweis: $\sum_{v \in V} \deg(v)$ zählt jede Kante zweimal.

Kante $\{2, 4\}$ liefert Beitrag von 1 zu $\deg(2)$ und $\deg(4)$

$\Rightarrow$ Kante $\{2, 4\}$ wird genau 2x gezählt. Das gilt für jede Kante aus E.

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

q.e.d.