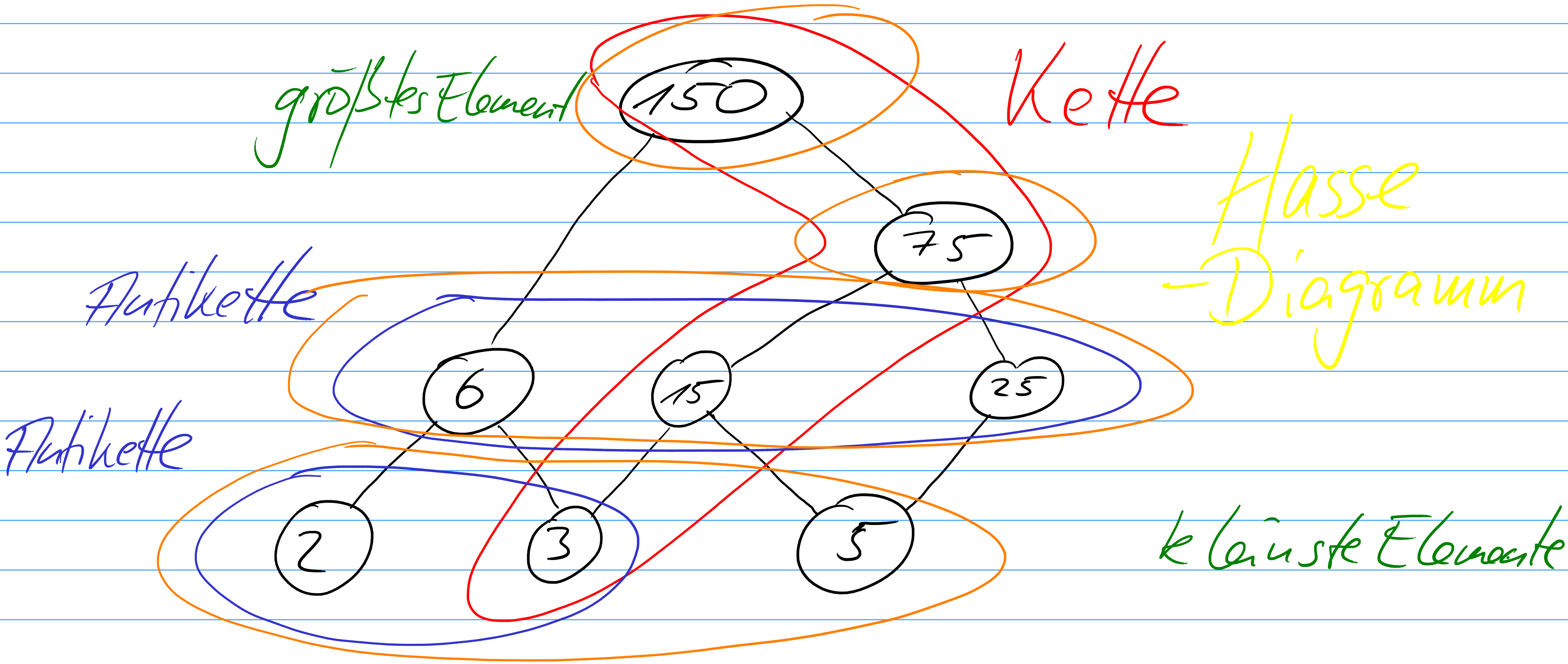
Wdh:

$$R = (\{2, 3, 5, 6, 15, 25, 75, 150\}, \preceq)$$

mit $a \preceq b \iff a \mid b$



$R \subset M \times M$

	Äquivalenzrelation		Partielle Ordnung	
Denke an:	$=$		$\leq$	
	R reflexiv	$(a,a) \in R$	R reflexiv	$(a,a) \in R$
	symmetrisch	$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$	antisymmetrisch	$(a,b),(b,a) \in R \Rightarrow a = b$
	transitiv	$(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$	transitiv	$(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

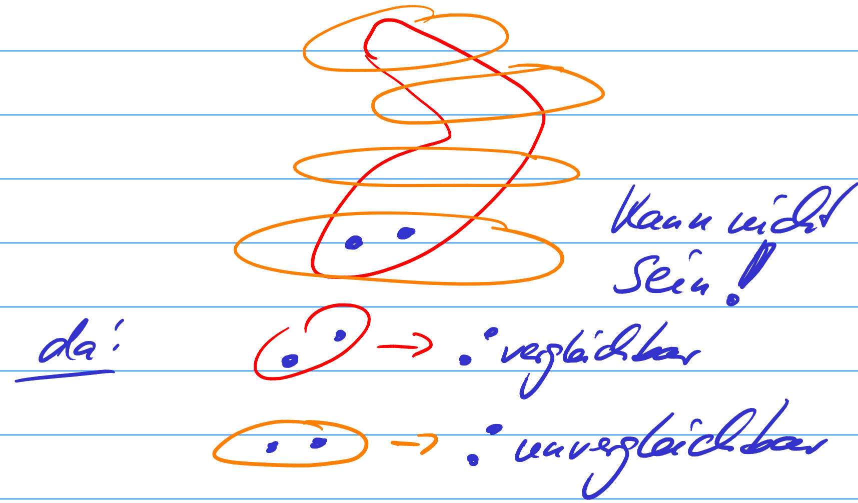
Satz 7.9: Sei $R = (M, \leq)$ partielle Ordnung und $M \neq \emptyset$ endlich.

Sei k die maximale Anzahl von Elementen in einer Kette.
Sei l die minimale Anzahl von Antiketten aus R, mit denen man M partitionieren kann.

Dann gilt $k = l$.

Bew: Sei $\bar{K}$ eine Kette mit k Elementen, $k = \max$.

Klar: $\ell \geq k$, denn jede Antikette kann höchstens ein Element aus $\bar{K}$ enthalten.



z.z: $\ell \leq k$ D.h. wir müssen eine Zerlegung von M in höchstens k Antiketten.

Definiere für $i \in \mathbb{N}$: $A_i := \{ x \in M :$ die längste Kette, die als größtes Element x hat, hat genau i Elemente $\}$

Fakten: $A_i = \emptyset$ für $i > k$, da k die Länge einer max. Kette in R ist

$\Rightarrow$ $M = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup \ldots \dot\cup A_k \longrightarrow \ell \leq k$

noch zu zeigen: A_i ist Antikette $\forall i \in [k]$

↯-Annahme: $\exists\, i \in [k]\ \exists\, x, y \in A_i$ mit $x < y$

$x \in A_i \Rightarrow \exists\, x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x$ Kette

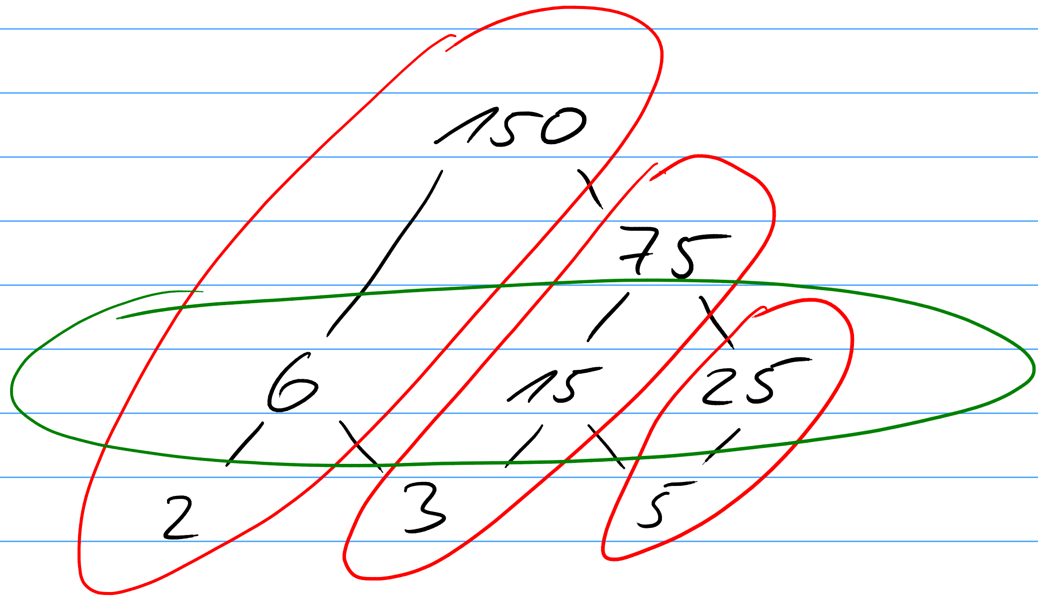
$\exists$ Kette $\underbrace{x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x < y}_{i+1 \text{ Elemente}}$

$\Rightarrow y \in A_j$ für $j \geq i+1$ im Wid. zu $y \in A_i$. q.e.d.

Satz 7.10 Sei $R = (M, \preceq)$ partielle Ordnung.

Dann gilt

$$k := \begin{array}{c}\text{min. Anzahl}\\ \text{von Ketten in einer}\\ \text{Partition von } M\end{array} = \begin{array}{c}\text{max. Anzahl}\\ \text{von Elementen in}\\ \text{einer Antikette}\end{array} =: l$$



Bew: Klar: $k \geq l$, da jede Kette höchstens ein Element einer Antikette enthalten kann

z.z: $k \leq l$ $\Rightarrow$ HA oder Buch

8. Elementares Zählen

Prop 8.1 "Summenregel"

Wenn $M_1, \dots, M_k$ endliche Mengen und

$$M = M_1 \dot\cup M_2 \dot\cup \dots \dot\cup M_k$$

, d.h. $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$, $M_i \cap M_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

dann gilt $|M| = \sum_{i=1}^{k} |M_i|$

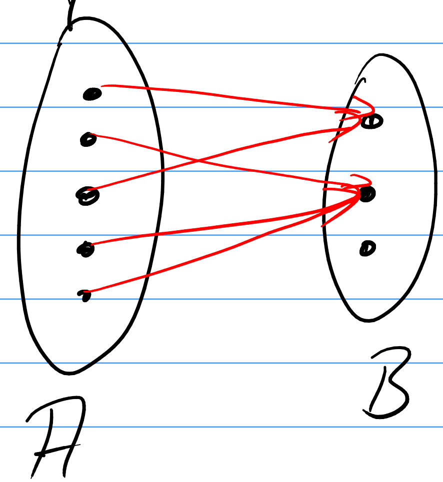
Prop 8.2 "Produktregel"

Wenn $M_1, \dots, M_k$ endliche Mengen und
$M = M_1 \times \dots \times M_k$, d.h. $M = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \in M_i, i \in [k]\}$

dann $$|M| = \prod_{i=1}^{k} |M_i|$$

Def./Prop 8.3:

Seien A, B zwei Mengen und $f: A \to B$ eine Abbildung



Das Urbild von $b \in B$ unter f bezeichnen wir mit

$$f^{-1}(b) = \{ a \in A : f(a) = b \}$$

Es gilt $\quad A = \dot{\bigcup}_{b \in B} f^{-1}(b)$

Die Abb f heißt

injektiv, wenn $\forall b \in B \quad |f^{-1}(b)| \leq 1$

surjektiv, wenn $\forall b \in B \quad |f^{-1}(b)| \geq 1$

bijektiv, wenn $\forall b \in B \quad |f^{-1}(b)| = 1$

Lemma 8.4 Zählen durch Bijektion

Seien $A, B \neq \emptyset$ endliche Mengen und $f: A \to B$ Abb. Dann gilt:

a) f bijektiv $\Rightarrow |A| = |B|$

b) Wenn $|A| = |B|$ f bijektiv $\Leftrightarrow$ f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv.

Bew: a) $A = \dot{\bigcup}_{b \in B} f^{-1}(b)$

$$\Rightarrow |A| \overset{8.1}{=} \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)| \overset{f \text{ bij.}}{=} \sum_{b \in B} 1 = |B|$$

b) $|B| = |A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)|$

$\Rightarrow$ Der Durchschnittswert eines Summanden ist 1.

Wenn f injektiv, dann alle Summanden ≤ 1, also damit alle Summanden $= 1$. $\Rightarrow$ f bijektiv

Wenn f surjektiv, dann alle Summanden ≥ 1, also damit alle Summanden $= 1$. $\Rightarrow$ f bijektiv

q.e.d.

Bem 8.5 Wenn A, B unendlich:

$f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$

$f(n) := \dots$

$$
\begin{aligned}
0 &\longmapsto 0\\
1 &\longmapsto 1\\
2 &\longmapsto -1\\
3 &\longmapsto 2\\
4 &\longmapsto -2\\
5 &\longmapsto 3\\
6 &\longmapsto -3\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Bsp 8.6: Sei $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Wie groß ist $|\mathcal{P}(M)|$?

Vermutung: $|\mathcal{P}(M)| = 2^n = 2^{|M|}$

Idee: Finde eine Bijektion

$$f: \mathcal{P}(M) \longrightarrow \{0,1\}^n = \underbrace{\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}^{n \text{ mal}}$$

$$|\{0,1\}^n| \overset{8.2}{=} \prod_{i=1}^{n} |\{0,1\}| = 2^n$$

Definiere $f(S)$ für $S \subset M$

$$f(S) := (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \text{ mit}$$

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{, falls } m_i \notin S \\ 1 & \text{, falls } m_i \in S \end{cases}$$

Dann ist f bijektiv.

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(M)| \overset{8.4}{=} |\{0,1\}^n| = 2^n$$