Wdh: Halls Heiratssatz

geg: bipartiter Graph $(A \dot\cup B, E)$

$\exists$ Matching, das A überdeckt

$\iff \forall \emptyset \neq S \subsetneq A$ gilt $|S| \leq |N(S)|$

Algorithmischer Test: $2^{|A|} - 2$ Mengen S.

Folgerung 3.5 Sei $G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit.

Und $\exists\, a, b \in \mathbb{N}$, so dass

$\forall x \in A: \quad |N(x)| = a$

und $\forall y \in B: \quad |N(y)| = b$

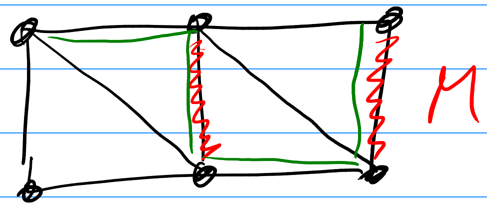
und $|A| \leq |B|$.

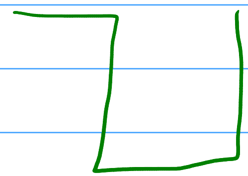
Dann hat G ein Matching, das A überdeckt.

Bew: HA

Wie lässt sich größtes Matching algorithmisch finden?

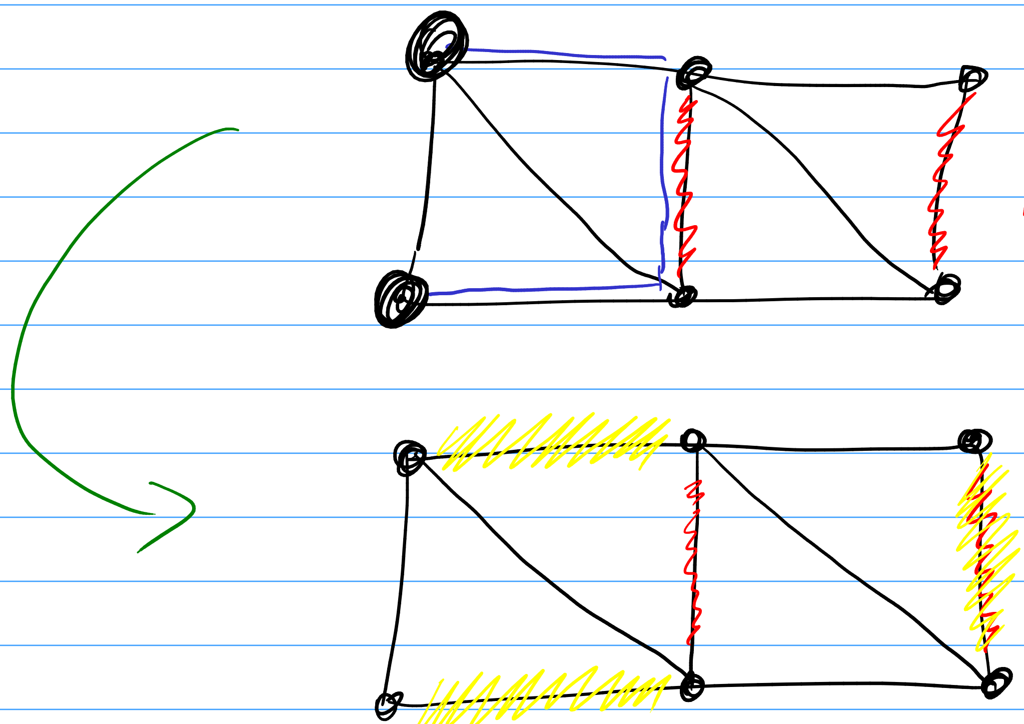
<u>Def:</u> Sei $G = (V, E)$ ein Graph und M ein Matching in G. Ein Weg in G heißt **alternierend**, falls er abwechselnd Kanten aus M und $E \setminus M$ verwendet.





ist M-alternierend

Wenn außerdem Anfangs- und Endknoten nicht von M überdeckt werden, dann heißt der Weg **M-augmentierend**.



M

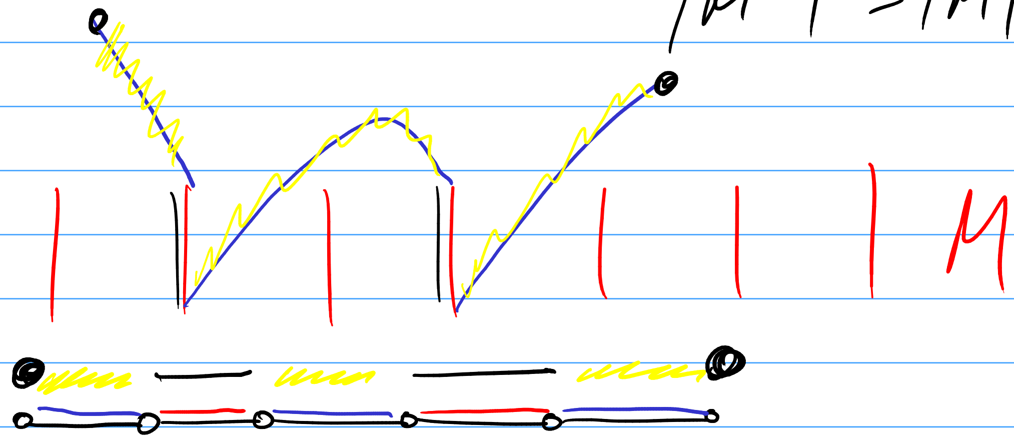
ist M-augmentierend

M' mit $|M'| > |M|$

Satz 3.8 Sei G Graph und M ein Matching in G. Dann gilt

$$\exists \text{ augmentierender Weg} \iff \exists \text{ Matching } M^* \text{ mit } |M^*| > |M|$$

Bew: ($\Rightarrow$)

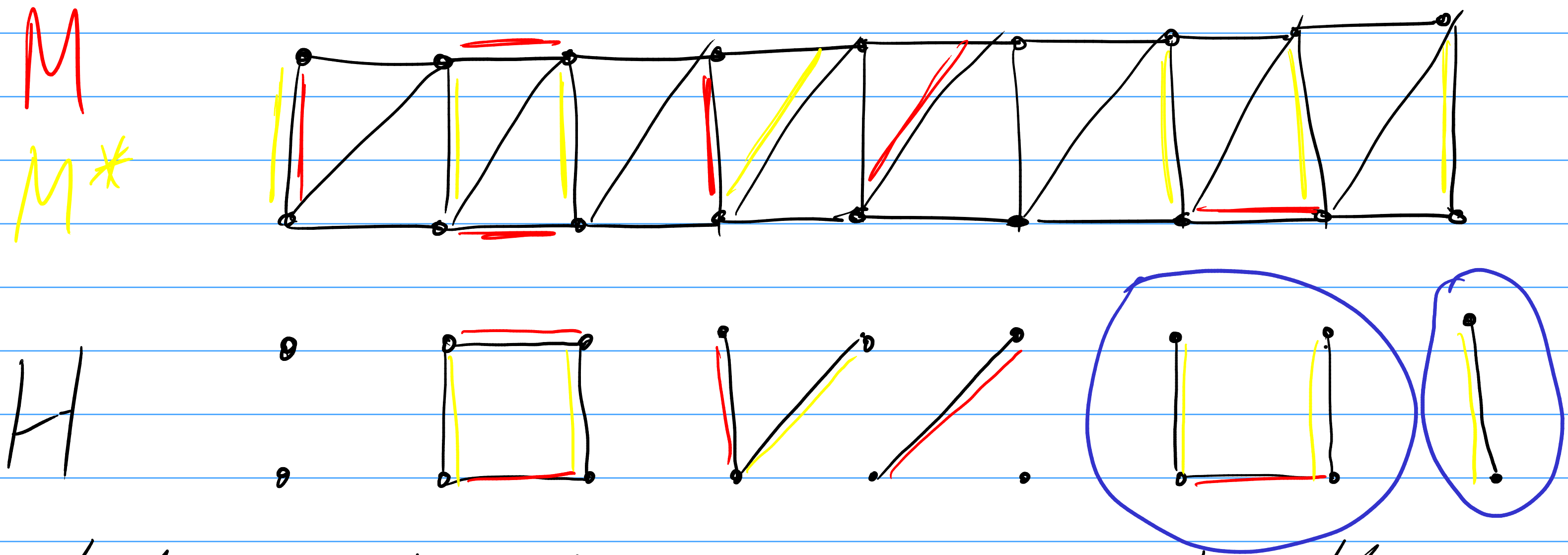


Wir vertauschen entlang des M-augm. Weges Nicht-Matching und Matching-Kanten.

$\Leftarrow$ Matchings M, M^* mit $|M| < |M^*|$

Betrachte den Subgraphen

$$H := (V, M \triangle M^*) = (V, (M \setminus M^*) \cup (M^* \setminus M))$$



H hat Maximalgrad ≤ 2, d.h. die Zshgs-Komponenten von H sind Wege oder Kreise gerader Länge.

Da $|M^*| > |M|$, muss es in H einen Weg geben, der mit einer M^*-Kante anfängt und mit einer M^*-Kante aufhört.

Das ist ein M-augmentierender Weg. q.e.d.

Folgerung:

$$\boxed{\begin{array}{l} M := \emptyset \\ \text{while } (\exists \text{ M-augmentierender Weg } W) \\ \quad \text{augmentiere } M \text{ entlang } W \end{array}}$$

findet ein größtes Matching

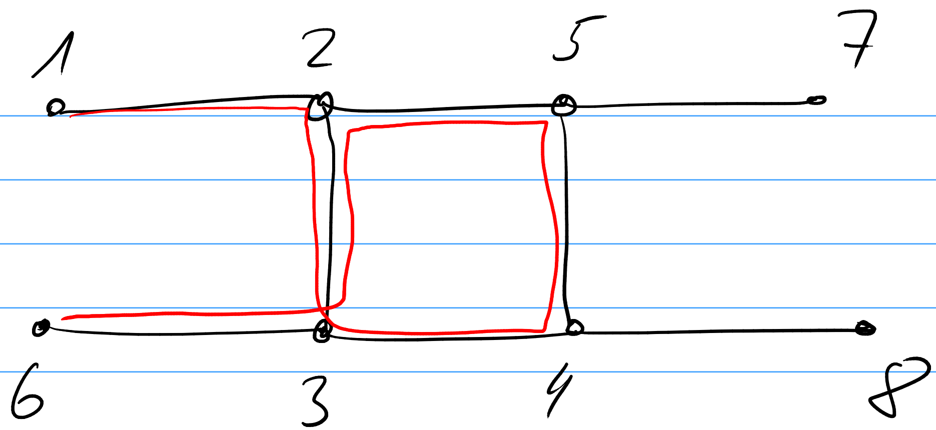
Bew: $\nexists$ M-augmentierender Weg $\overset{(3.8)}{\Longleftrightarrow}$ M ist größtes Matching

5 Euler-Touren (und Hamilton-Kreise)

Def: Ein Kantenzug in $G = (V, E)$ ist eine Folge $(v_0, \ldots, v_k)$ von Knoten $v_i \in V$, so dass $\{v_{i-1}, v_i\} \in E \quad \forall i \in [k]$.

Man sagt, dass der Kantenzug die Kanten $\{v_{i-1}, v_i\}$ benutzt.

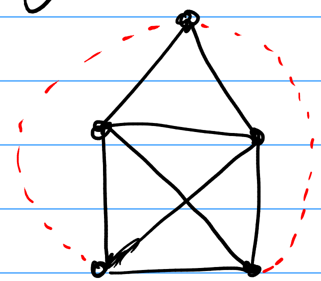
Beachte: Kantenzug kann Knoten und Kanten mehrfach benutzen.



$(1, 2, 3, 4, 5, 2, 3, 6)$ ist ein Kantenzug

Ein Kantenzug heißt geschlossen, wenn $v_0 = v_k$.

Eine Euler-Tour von G ist ein geschlossener Kantenzug, der jede Kante von G genau einmal benutzt.



hat keine Euler-Tour

hat Euler-Tour

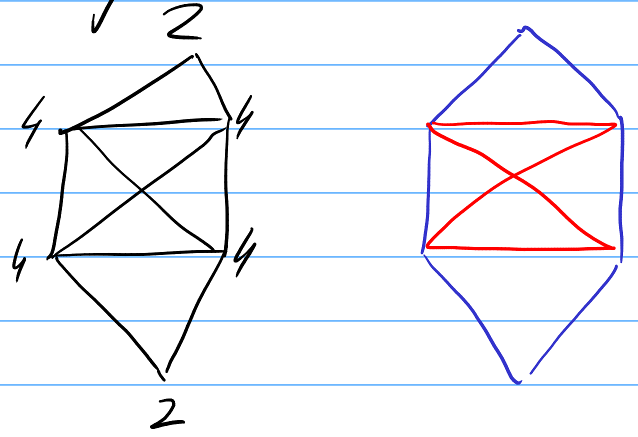
Satz 5.2 Sei G ein zshg. Graph. Dann sind äquivalent:

a) Es gibt eine Euler-Tour.

b) Alle Knoten von G haben geraden Grad.

c) Es gibt eine Partition von E in kanten-disjunkte Kreise: $E = C_1 \,\dot{\cup}\, \dots \,\dot{\cup}\, C_k$.

Bsp:



Bew: nächste VL