Wdh: k-Partition der Zahl $n \in \mathbb{N}_0$:

$$n = n_1 + \ldots + n_k \quad \text{mit } n_i \in \mathbb{N} \ \forall i \in [k]$$

geordnet

$1+2 \neq 2+1$

ungeordnet

$1+2 = 2+1$

Noch zu zeigen 11.5 d)

Für $1 \leq k \leq n$ gilt

Es gibt $\binom{n-1}{k-1}$ geordnete k-Partitionen der Zahl n.

Bew:

$$n = \underbrace{1 + 1}_{n_1} + \underbrace{1 + 1}_{n_2} + \dots \underbrace{+ 1 + 1}_{n_{k-1}} + \underbrace{1}_{n_k}$$

Bijektion zwischen geordneten k-Partitionen von n und der Menge der Zuordnungen von $k-1$ ◯ auf $n-1$ +-Zeichen.

$\Rightarrow \binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten. //

Bsp: $S^n :=$ Menge aller Bijektionen $f : [n] \to [n]$

(Permutationen)

$$|S^n| = n!$$

$1 \longmapsto n$ Möglichkeiten

$2 \longmapsto n-1$ Möglichkeiten

$\vdots$

$n \longmapsto 1$ Möglichkeit

$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$

$$D^n := \{ f \in S^n : f(x) \neq x \;\; \forall x \in [n] \}$$

Frage: $|D^n| = ?$

n	1	2	3	4
D^n	0	1	? = 2	??

1	2	3
~~1~~	~~2~~	~~3~~
~~1~~	~~3~~	~~2~~
~~2~~	~~1~~	~~3~~
2	3	1
3	1	2
~~3~~	~~2~~	~~1~~

Frage:

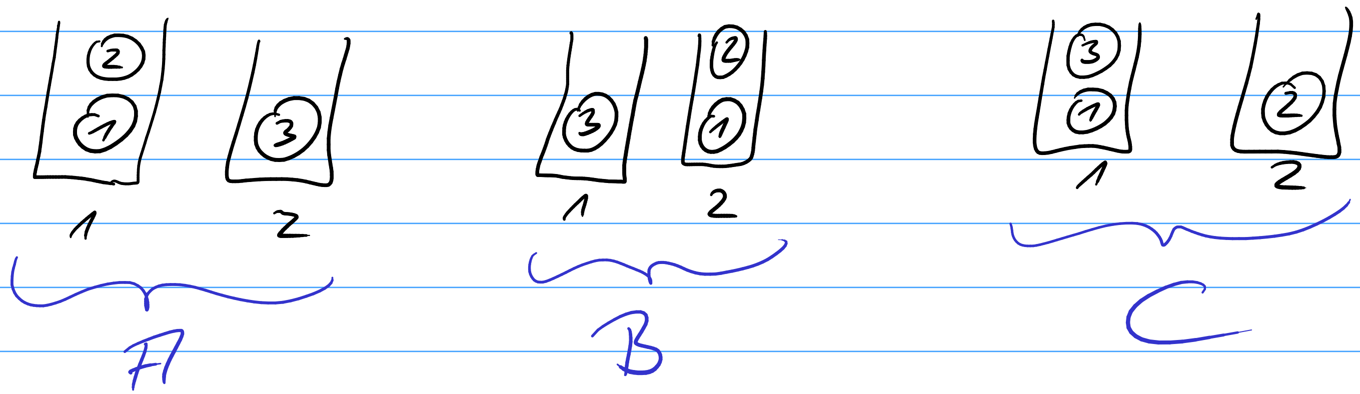
$$\frac{|D^n|}{|S^n|} \xrightarrow{n \to \infty} \begin{cases} 0 & ? \\ 1/2 & ? \\ 1/\pi & ? \\ 1/e & ? \\ 1 & ? \end{cases}$$

Bsp 11.6 n Bälle, k Körbe

Wieviele Verteilungsmöglichkeiten?

↳ hängt davon ab, ob Körbe und Bälle unterscheidbar sind

3 Bälle, 2 Körbe



Bälle	Körbe	
unt-bar	unt-bar	$A \neq B \neq C \neq A$
nicht unt-bar	unt-bar	$A \neq B$, $A = C$
unt-bar	nicht unt-bar	$A = B$, $B \neq C$
nicht unt-bar	nicht unt-bar	$A = B = C$

Satz 11.7: Werfe n Bälle in k Körbe. Dann ist die Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten geg. durch:

	bel.	inj.	surj.	bij.
a) Bälle unt-bar, Körbe unt-bar	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k!\, S_{n,k}$	$n!$
b) Bälle nicht unt-bar, Körbe unt-bar	$\binom{n+k-1}{n}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$	1
c) Bälle unt-bar, Körbe nicht unt-bar	$\sum_{i=1}^{k} S_{n,i}$	1	$S_{n,k}$	1
d) Bälle nicht unt-bar, Körbe nicht unt-bar	$\sum_{i=1}^{n} P_{n,i}$	1	$P_{n,k}$	1
		wenn $n \le k$	wenn $n \ge k$	wenn $n = k$

Bew: a) Bälle unterscheidbar, Körbe unterscheidbar

Funktionen: $\{n \text{ Bälle}\} \xrightarrow{f} \{k \text{ Körbe}\}$

$\{1, 2, \dots n\} \xrightarrow{f} \{1, \dots, k\}$

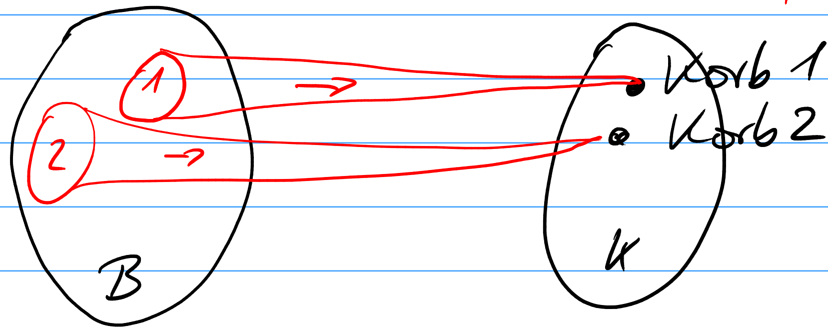
gegeben als $\big(f(1), f(2), \dots, f(n)\big) \in [k]^n$

$\longrightarrow k^n$ Möglichkeiten

injektiv: "Ziehen ohne Zurücklegen": $k^{\underline{n}}$ Möglichkeiten

bijektiv: geht nur für $n=k \Longrightarrow n!$ Möglichkeiten (Permutationen) surjektiv: $f : B \to K$

$$B = \dot{\bigcup_{y \in K}} \underbrace{f^{-1}(y)}_{\neq \emptyset,\ \text{weil } f \text{ surjektiv}}$$



$|B| = n$ $\qquad$ $|K| = k$

$\Rightarrow$ zähle k-Partitionen von $[n]$: $S_{n,k}$ viele

Wähle für jede Partitionsklasse $y \in [k]$, auf das ihre Elemente zugeordnet werden

$\Rightarrow k! \cdot S_{n,k}$ Möglichk.

Rest: s. Skript

Bsp 11.8: $\frac{|\mathcal{D}^n|}{|\mathcal{S}^n|} \longrightarrow ?$

Setze für $x \in [n]$:

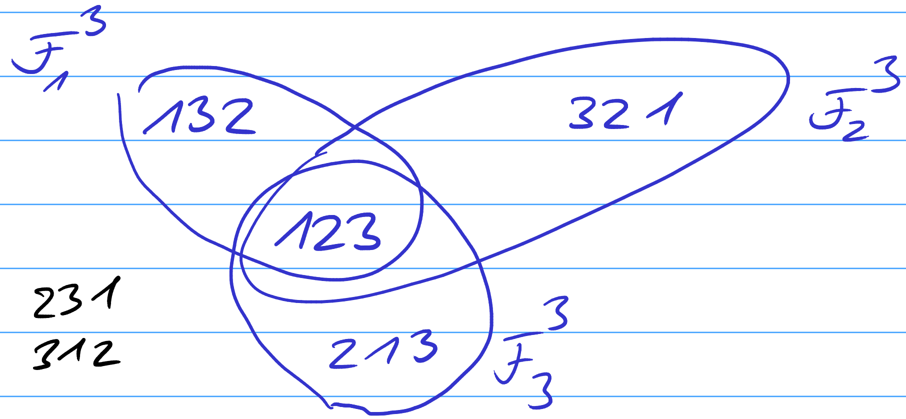
$$\mathcal{F}_x^n := \{ f \in \mathcal{S}^n : f(x) = x \}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}^n = \mathcal{S}^n \setminus \left(\bigcup_{x=1}^{n} \mathcal{F}_x^n \right)$$

$$|\mathcal{D}^n| = |\mathcal{S}^n| - \left| \bigcup_{x=1}^{n} \mathcal{F}_x^n \right|$$

nicht disjunkt!

z.B. $n=3$



$$\left|\bigcup_{x\in[n]} \mathcal{F}_x^n\right| = |\mathcal{F}_1^n| + |\mathcal{F}_2^n| + \ldots + |\mathcal{F}_n^n| - |\mathcal{F}_1^n \cap \mathcal{F}_2^n| - |\mathcal{F}_1^n \cap \mathcal{F}_3^n| - \ldots$$

$$\overset{\text{Inklusion/Exklusion}}{=} \sum_{r=1}^{n} \left((-1)^{r-1} \sum_{I\in\binom{[n]}{r}} \underbrace{\left|\bigcap_{x\in I} \mathcal{F}_x^n\right|} \right)$$

$$= \left|\{ f\in S^n : f(x)=x \ \forall x\in I \}\right|$$

= Anzahl der Bijektionen von $[n]\setminus I$ nach $[n]\setminus I$

fix I beliebig $[n]-I$

$$= (n-|I|)!$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left((-1)^{r-1} \sum_{I\in\binom{[n]}{r}} (n-r)! \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \cdot (n-r)! \cdot \Big(\underbrace{\sum_{I \in \binom{[n]}{r}} 1}_{= \binom{n}{r}} \Big)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \cancel{(n-r)!} \cdot \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot \cancel{(n-r)!}}$$

$$= - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r} \cdot \frac{n!}{r!}$$

$$|\mathcal{D}^n| = |\mathcal{S}^n| - \Big| \bigcup_{x \in [n]} \mathcal{F}_x^{\,n} \Big|$$

$$= n! \cdot \frac{1}{0!} + \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r} \cdot \frac{n!}{r!}$$

$$= n! \cdot \left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \cdot \frac{1}{r!} \right)$$

$$\frac{|\mathcal{D}^n|}{|\mathcal{S}^n|} = \frac{n! \cdot \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}}{n!} = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} \xrightarrow{n\to\infty} \exp(-1) = \frac{1}{e} = 0{,}37\ldots$$

$$\exp(x) := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} := \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{x^r}{r!}$$

s. Analysis