Def 2.6: a) Ein Graph $H = (W, F)$ heißt <u>Subgraph</u> von einem Graphen $G = (V, E)$, wenn

$W \subset V$

$F \subset E$

Schreibe dann $H \subset G$.

Bem 2.8: Wir schreiben $A \subset B$ für zwei Mengen A und B, wenn $\forall a \in A: a \in B$. Also insbesondere $A \subset A$.

(„$\subseteq$" wird in dieser VL nicht benutzt.)

<u>Echte Teilmenge:</u> $A \subsetneq B$

Def: b) Ein Graph $H = (W, F)$ heißt <u>induzierter Subgraph</u> von $G = (V, E)$, wenn $W \subset V$ und

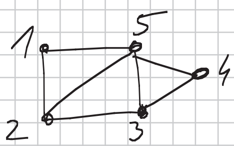
e = 2-elementige Teilmenge von Knotenmenge

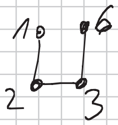
$$F = \{ e \in E : e \subset W \}.$$

Die beiden Knoten von e sind in W.

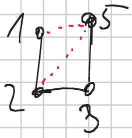
(D.h. alle Kanten von G innerhalb von W existieren auch in H.)

<u>Schreibe:</u> $H = G[W]$

Bsp: $G =$ 

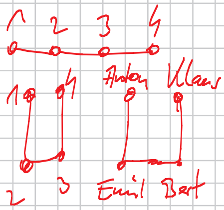
$H_1 =$ 

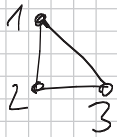
$H_1 \not\subset G$

$H_2 =$ 

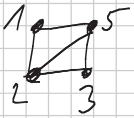
$H_2 \subset G$ nicht induziert

Graphgleich?



$H_3 =$ 

$H_3 \not\subset G$

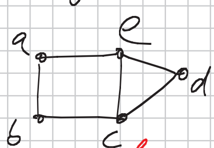
$H_4 =$ 

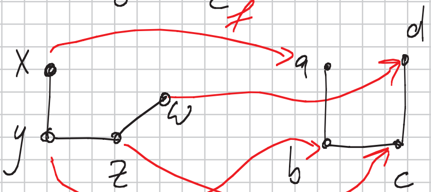
$H_4 \subset G$ induziert, $H_4 = G[\{1,2,3,5\}]$

Def 2.9: Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen isomorph, schreibe $G_1 \cong G_2$, wenn

$\exists$ Bijektion $f: V_1 \to V_2$ mit

$\forall v,w \in V_1$ gilt $\{v,w\} \in E_1 \iff \{f(v), f(w)\} \in E_2$

Bsp: $G =$ 

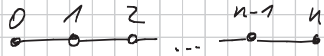
$H_1 =$ 

$= H_2$

$H_1 \not\subset G$ $\quad H_2 \subset G \quad$ mit $H_1 \cong H_2$

$H_3 =$ 

$H_3 \subset G$, aber $H_3 \not\cong H_1$

Def 2.11: $n \in \mathbb{N}_0$: $P_n :=$  Weg/Pfad *path*

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$: $C_n :=$  Kreis *cycle*

$P_0 = \bullet$

$P_1 =$ 

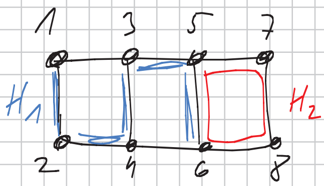
Wenn $H \cong P_n$, dann ist H ein <u>Weg der Länge n</u>.

In diesem Fall hat H genau 2 Blätter. (falls $n \geq 1$)

→ Anfangs- und Endknoten von H

→ H heißt auch x-y-Weg / x,y-Weg

Wenn $H \cong C_n$, dann ist H ein <u>Kreis der Länge n</u>.

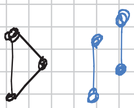
<u>Bsp:</u> 

H_1 Weg der Länge 5

H_2 Kreis der Länge 4

Def 2.13 Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

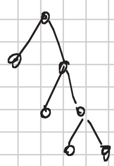
a) G heißt <u>kreisfrei</u>, wenn G keinen Kreis als Subgraphen enthält.

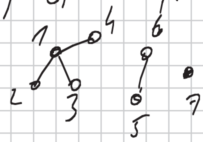


b) G heißt <u>zusammenhängend</u> (zshg.), wenn $\forall x,y \in V$ existiert ein x,y-Weg als Subgraph von G.

c) Wenn G kreisfrei und zshg., nennen wir G einen <u>Baum</u>.

d) G kreisfrei ⇒ G Wald

<u>Bsp:</u>  Baum



Def. 2.15

a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $x \in V$, $S \subset V$, $e \in E$, $F \subset E$.

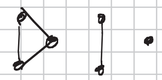
$G - x := G[V \setminus \{x\}]$ entferne Knoten x (und alle Kanten, die x enthalten)

$G - S := G[V \setminus S]$ entferne Knoten S (und alle Kanten, die einen Knoten aus S enthalten)

$G - e := (V, E \setminus \{e\})$ entferne Kante e

$G - F := (V, E \setminus F)$ entferne alle Kanten aus F

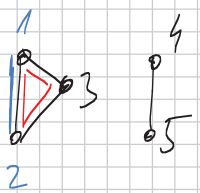
b) Zusammenhangskomponente



Wenn $G = (V, E)$ Graph und $H = G[W]$ ein zshg, induzierter Subgraph von G ist, so dass es keine Teilmenge W' mit $W \subsetneq W' \subset V$ gibt, so dass $G[W']$ zshg. ist, dann heißt H Zusammenhangskomponente.

H ist also inklusionsmaximal zshg. Subgraph

Bsp:



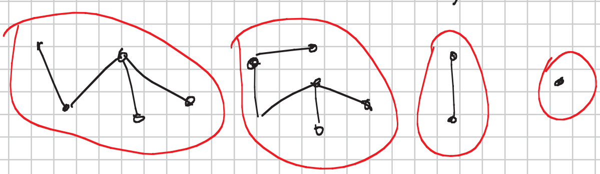
inklusionsmaximal zshg.
=> Zshg.-Komponente

$H_1 = G[\{1,2\}]$ $\quad H_2 = G[\{1,2,3\}]$ und $\{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\}$

=> H_1 ist nicht inklusionsmaximal zshg, da wir Knoten 3 hinzufügen können (nebst Kanten $\{1,3\}, \{2,3\}$)

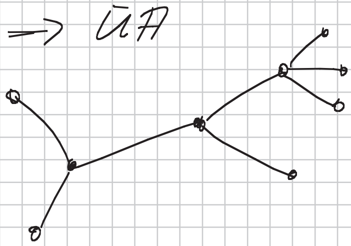
Lemma 2.16

a) Die Zshg.-Komponenten eines kreisfreien Graphen sind Bäume.



Zshg.-Komponente: zshg + kreisfrei => Baum

b) Jeder Baum mit mindestens zwei Knoten hat mindestens 2 Blätter. → ÜA



c) Wenn G ein beliebiger Baum und b ein beliebiges Blatt von G, dann ist $G-b$ wieder ein Baum.

Satz 2.17: Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Es gelte $n:=|V|$, $m:=|E|$. Dann sind äquivalent:

a) G ist ein Baum,

b) G ist ist zshg und $m=n-1$

c) G ist kreisfrei und $m=n-1$

d) G ist kantenmaximal kreisfrei,

d.h. G ist kreisfrei und Hinzufügen <u>jeder</u> weiteren Kante zerstört Kreisfreiheit

e) G ist kantenminimal zshg,

d.h. G ist zshg. und Entfernen jeder Kante zerstört den Zusammenhang

f) Zu je zwei Knoten $x, y \in V$ gibt es **genau einen** x,y-Weg.

Bew: **ÜA**