Wdh.: Kantenzug in $G = (V, E)$

$\shortparallel$

Folge von Knoten in V:

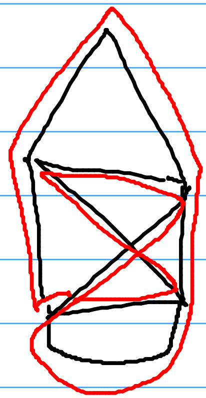
$(v_0, v_1, \dots, v_k)$ mit

$\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für $i = 1, \dots, k$

benutzte Kante

Kantenzug heißt geschlossen, falls $v_k = v_0$.

Eulertour $= \begin{cases} \text{geschlossener Kantenzug und} \\ \text{jede Kante wird genau einmal} \\ \text{benutzt.} \end{cases}$

 besitzt Euler-Tour

G zsgh. und alle Knoten haben geraden Grad

$\Downarrow$

$\exists$ Eulertour

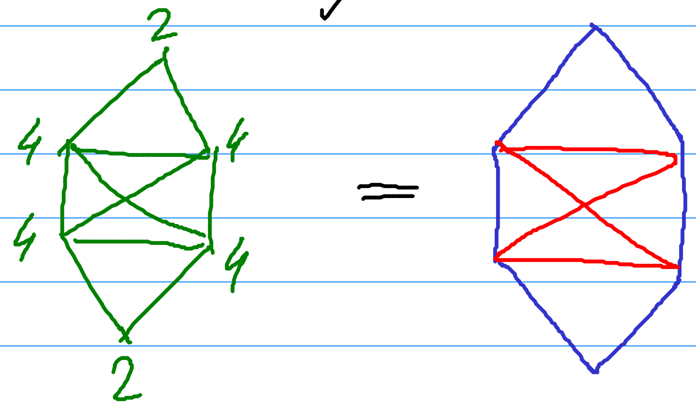
Satz 5.2. Sei $G = (V, E)$ zshg Graph.

Dann sind äquivalent:

a) Es gibt es eine Eulertour.

b) Alle Knoten in G haben geraden Grad.

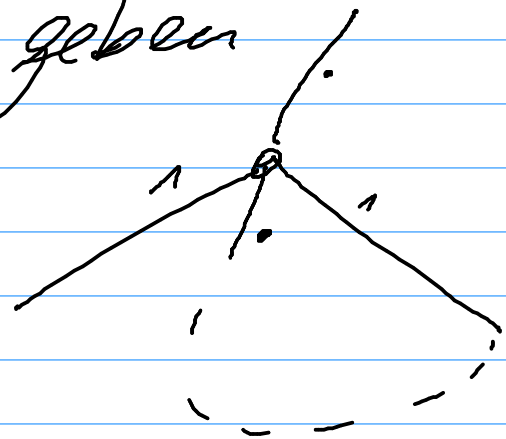
c) Es gibt eine Partition von E in kantendisjunkte Kreis $E = C_1 \dot\cup C_2 \dot\cup \dots \dot\cup C_k$



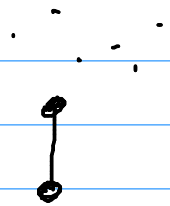
__Bew:__ $\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Laufe Kanten des Graphen entlang einer Euler-Tour ab.

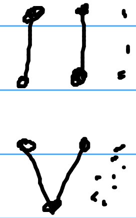
$\Rightarrow$ wir kommen in jedem Knoten genauso oft an, wie wir ihn verlassen

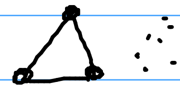
$\Rightarrow$ da alle Kanten genau einmal benutzt werden, muss es in jedem Knoten eine __gerade Anzahl__ von ihn berührenden Kanten geben.



$\boxed{b) \Rightarrow c)}$ Zeigen durch Induktion über $|E|$, dass $b) \Rightarrow c)$ auch ohne die Voraussetzung „zshg" gilt

Ind-Anf. $\boxed{|E| = 0}$, $|E| = 1$  es gibt keinen Graphen, der b) erfüllt

$|E| = 2$  hier auch nicht

$|E| = 3$  $b) \Rightarrow c)$ erfüllt.

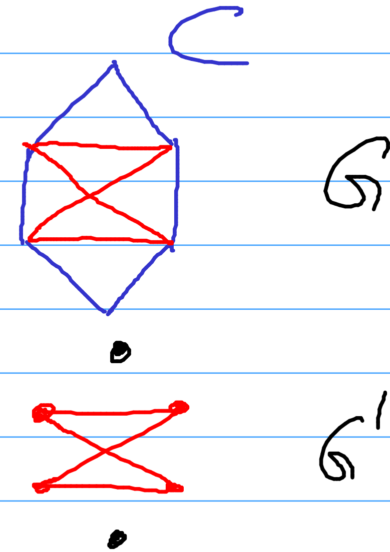
Sei also nun $|E| \geq 1$.

erfüllt b)

Wäre G kreisfrei mit $|E| \geq 1$, so ist G ein Wald = Vereinigung von Bäumen

In jedem Baum mit mindestens einer Kante gibt es mindestens 2 Blätter $\Rightarrow$ ungerader Grad ↯ zu b)

$\Rightarrow$ G besitzt Kreis C.

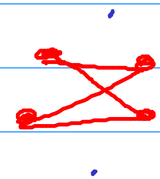


Lösche alle Kanten aus G in C und erhalte neuen Graphen G'.

G' erfüllt auch b).

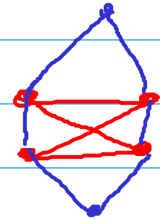
G' hat weniger Kanten als G

$\xrightarrow[\text{b)} \to \text{c)}]{\text{Ind.-Vor.}}$ Kanten von G' = Vereinigung kanten-disjunkter Kreise

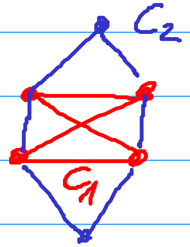


Nehmen wir C wieder hinzu:

Kanten von G = Vereinigung kanten-disjunkter Kreise



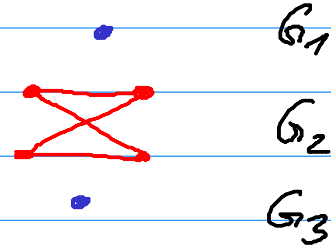
$\boxed{c) \Rightarrow a)}$ zz.: $E = C_1 \dot\cup \dots \dot\cup C_k \Rightarrow \exists$ Eulertour in G



Induktion: über Anzahl k der Kreise in Partition

Ind.-Anf.: $k = 0$ ✓

Sei $k \geq 1$. $\Rightarrow \exists$ Kreis C_k in Partition



Betrachte $G' = (V, E - C_k)$

und seien $G_1, \dots, G_\ell$ die Zshg.-Komponenten von G'

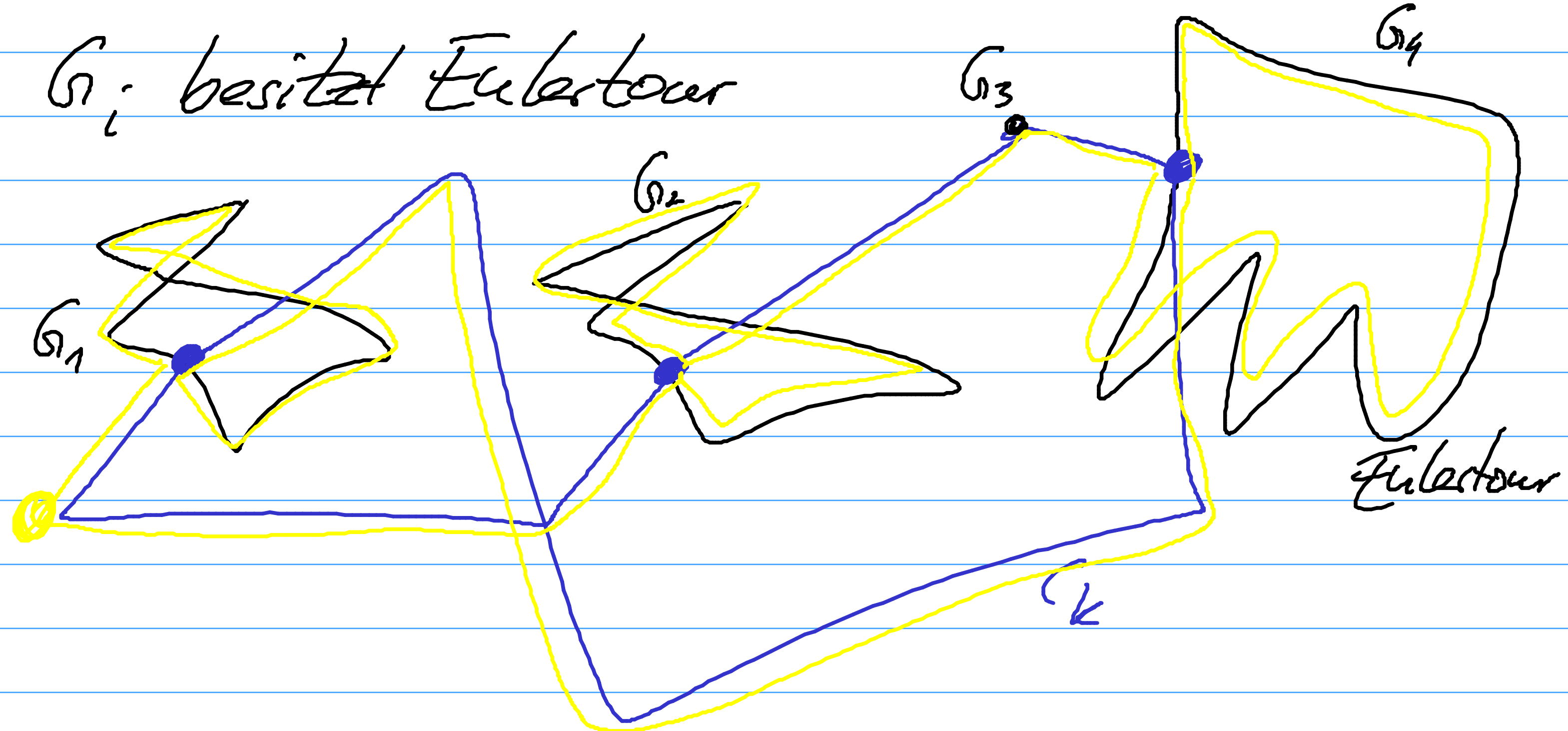
Da G zshg ist, gilt: C_k berührt alle G_i.

Für alle $i \in [\ell]$: G_i hat eine Partition in $\leq k-1$ Kreise

$$G: \quad E = C_1 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, C_{k-1} \cup C_k$$

$$G': \quad E' = \underbrace{C_1}_{G_1} \,\underbrace{\dot\cup}_{G_2} \ldots \underbrace{\dot\cup\, C_{k-1}}_{G_\ell}$$

$\xRightarrow{\text{Ind-Vor.}}$ G_i besitzt Eulertour



Konstruiere Eulertour von G wie folgt:

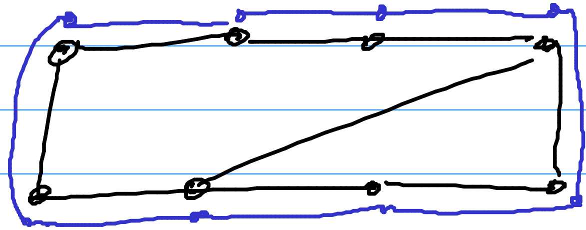
1) Starte in beliebigen Knoten von C_k und folge den Kanten C_k.

2) Jedes Mal, wenn wir das Mal eine Komponente G_i besuchen, laufen wir alle Kanten der Eulertour von G_i ab und folgen erst dann weiter den Kanten von C_k.

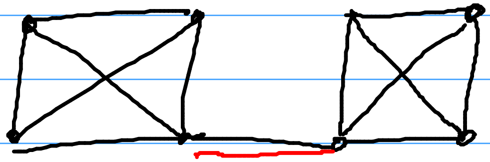
q.e.d.

Def: Ein Kreis der Länge $|V|$ in $G = (V, E)$ heißt <u>Hamilton-Kreis</u>.

Bsp:



hat Hamiltonkreis



hat keinen Hamiltonkreis

Es ist schwer zu entscheiden, ob G einen Hamilton-Kreis besitzt.

Dagegen ist es einfach zu entscheiden, ob G überhaupt einen Kreis besitzt. (Jede Zshg-Komponente (V', E') erfüllt $|V'| = |E'| + 1$.)

Satz 5.5 (Satz von Dirac)

Wenn $G=(V,E)$ Graph und der Minimalgrad

$$\delta(G) \geq \frac{|V|}{2} \quad \text{und} \quad |V| \geq 3,$$

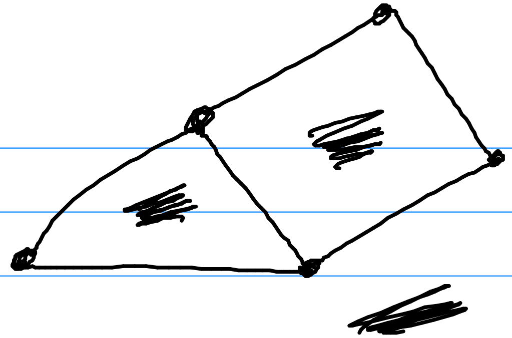
dann hat G einen Hamiltonkreis.

Bew: HA / evtl. ÜA

6 Planare Graphen

Def. 6.1: Graph $G = (V, E)$ heißt <u>planar</u>, wenn man seine Knoten und Kanten so „in die Ebene zeichnen kann", dass sich Kanten nicht „schneiden" und nur in gemeinsamen Endknoten „berühren".
Eine solche „Zeichnung" heißt <u>Einbettung</u> von G.
Die durch diese Zeichnung entstehenden „Zshg.-Komponenten der Ebene" bilden die Menge R der <u>Gebiete</u> und $G = (V, E, R)$ heißt <u>ebener Graph</u>.

Bsp:



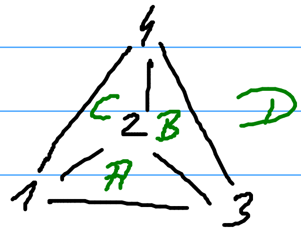
3 Gebiete

Übrigens:

$$\binom{V}{2} := \left\{ \{x,y\} : \begin{array}{l} x \neq y \\ x,y \in V \end{array} \right\}$$

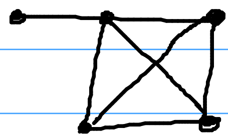
Bsp: $G_1 = \left([4], \binom{[4]}{2}, \{A,B,C,D\} \right)$

$$= \left(\{1,2,3,4\}, \left\{ \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\} \right\}, \{A,B,C,D\} \right)$$

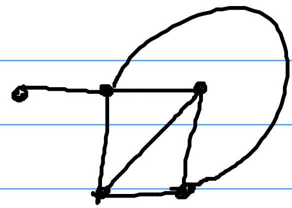


ist ebener Graph
planarer

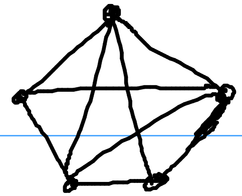
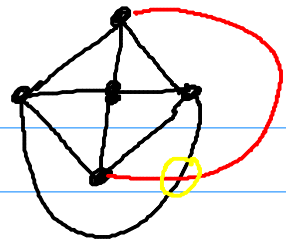
$G_2 =$



$=$



ebener
ist planarer Graph.

$G_3 =$  

(vollständiger Graph K_5)

Stundenlanges Probieren

vielleicht ist G_3 **nicht** planar

Satz 6.2 (Eulersche Polyederformel)

Sei $G = (V, E, R)$ ein ebener, zshg. Graph.

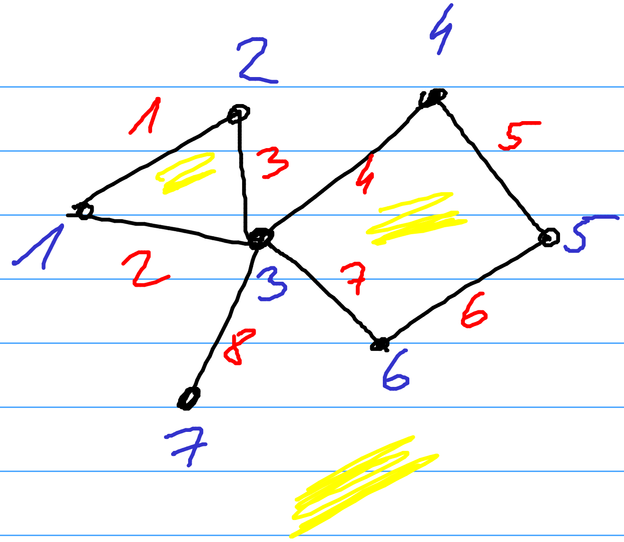
Dann gilt
$$\boxed{|V| - |E| + |R| = 2}$$

Besser bekannt als:

$$\underbrace{e}_{\#\text{Ecken}} - \underbrace{k}_{\#\text{Kanten}} + \underbrace{f}_{\#\text{Flächen}} = 2$$

Würfel: $8 - 12 + 6 = 2$

Bsp:



$|V| = 7$

$|E| = 8$

$|R| = 3$

$$\boxed{7 - 8 + 3 = 2}$$

Bew: nächste VL