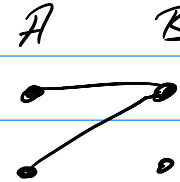
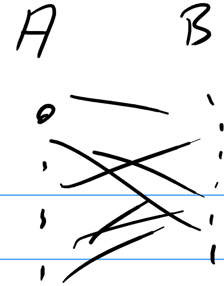
Achtung! „Hall-Bedingung"

$\forall S \subset A$ ...

$S = A$ ist zugelassen! sonst:





12 Asymptotisches Zählen

Bsp 12.1. a) $\binom{n}{37} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-36)}{37!} = \frac{1}{37!}\cdot n^{37} + \ldots ? \ldots n^{36} + \ldots ? \ldots n^{35} + \ldots$

$= \frac{1}{37!}\cdot n^{37} +$ kleinere Terme

$= \frac{1}{37!}\cdot n^{37} + O(n^{36})$

$+ \Theta(n^{36})$

$+ o(n^{37})$

b) $\binom{n}{n/2} \approx 2^n$

$$\frac{2^n}{c_1\sqrt{n}} \leq \binom{n}{n/2} \leq \frac{2^n}{c_2\sqrt{n}}$$

$\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ und $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass diese Ungleichungen für $n \geq N_0$ erfüllt sind

$$\binom{n}{n/2} = \frac{2^n}{\Theta(\sqrt{n})} = \Theta\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Def 12.2 Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Definiere

$$f(n) = O(g(n)) :\Longleftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall n \geq n_0 \text{ gilt}$$
$$|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$$

z. B. $\quad n = O(n^2)$

$$f(n) = \Omega(g(n)) :\Longleftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall n \geq n_0 \text{ gilt}$$
$$|f(n)| \geq c \cdot |g(n)|$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) :\Longleftrightarrow \exists c > 0, \exists C > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall n \geq 0 \text{ gilt}$$
$$c \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq C \cdot |g(n)|$$

z. B. $\quad 3n^2 + 7 = \Theta(n^2 - 3)$

$$f(n) = o(g(n)) :\Longleftrightarrow \forall c>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \text{ gilt}$$

$$|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$$

$$\hookrightarrow \lim_{n \to \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = 0$$

Bsp: $n = o(n^2)$

$$f(n) = \omega(g(n)) :\Longleftrightarrow \forall c>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \text{ gilt}$$

$$|f(n)| \geq c \cdot |g(n)|$$

Bsp: $e^n = \omega(n)$

$$f(n) \sim g(n) :\Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 1$$

Bsp: $(-1)^n \sim 1^n$

a) $f(n) = o(g(n)) \iff \forall c > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \frac{|f(n)|}{|g(n)|} \leq c$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 0$$

b) $f(n) = O(g(n)) \underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|}$ existiert

denn: $f(n) = 2n + \sin(n) \cdot n$

$$n \leq f(n) \leq 3n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad f(n) = O(n)$$

aber: $\lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{|n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n + \sin(n)\cdot n}{n} = \lim_{n\to\infty} (2 + \sin(n))$

existiert nicht!

Bsp 12.4 a) $7n^2+17n \overset{\in}{=} \Theta(n^2)$

Bew: Setze $c := 24$, $n_0 = 1$. Dann gilt $\forall n \geq n_0$:

$$\underbrace{7n^2+17n} \leq 24n^2 = \underbrace{c}\cdot\underbrace{n^2}$$

Andere äquivalente Def:

$$\Theta(g) := \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } |f(n)| \leq c \cdot |g(n)| \quad \forall n \geq 0 \}$$

b) $7n^2+16n = \Theta(n^2)$

d) $17n = \Theta(n)$

c) $17n = \Theta(n^2)$

e) $7n^2+17n = \Theta(n^2)$

e) $7n^2 + 17n = \Theta(n^2)$

Bew: Wähle $c = 7$, $C = 24$, $n_0 = 1$. Dann gilt $\forall n \geq n_0$:

$$7n^2 \leq 7n^2 + 17n \leq 24n^2$$

$$c \cdot n^2 \leq f(n) \leq C \cdot n^2$$

$$\Rightarrow 7n^2 + 17n = \Theta(n^2)$$

f) $17n \neq \Theta(n^2)$

Bew: Wäre $17n = \Theta(n^2)$, dann $\exists c > 0$ und $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

mit $\boxed{\forall n \geq n_0}$: $c \cdot n^2 \leq 17n$

$\Leftrightarrow n \leq \frac{17}{c}$ $\lightning$, denn damit wäre n nach oben beschränkt

g) $\frac{1}{7}n^2+n \neq o(n^2)$

Bew: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{7}n^2+n}{n^2} = \frac{1}{7} \neq 0$

h) $\frac{1}{7}n^2+n = o(n^{2,1})$

Bew: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{7}n^2+n}{n^{2,1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{n^{0,1}} + \frac{1}{n^{1,1}}\right) = 0$

i) $\ln(\sqrt{n}) \neq o(\ln(n^3))$

Bew: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^{1/2})}{\ln(n^3)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot\ln n}{3\cdot\ln n} = \frac{1}{6} \neq 0$

j) Wenn $f(n)=o(1)$, dann $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{1}=0$